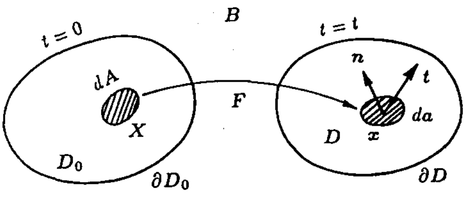
ナビヤ・ストークス方程式のラグランジェ型表示

金沢大学工学部　正会員　○石田　啓
金沢大学工学部　正会員　　矢富 盟祥
金沢大学工学部　学　生　　手賀夕紀子



1．緒言　流体の運動を表す手法として，一般的には場の理論であるオイラー的方法が便利であり，粒子の運動状況が砕波現象のように急変する場合や，水滴の落下の様に境界条件が圧力により与えられる場合などは，粒子理論であるラグランジェ的手法が，新たな知見を与える可能性が期待されるが，従来，粘性項を含めた運動方程式のラグランジェ的表現が見あたらないため，ここで，その誘導を示すこととする．

2．運動量保存則　流体素分（粒子）から成る物体Bにおいて，t＝0における対象領域を D_0，その境界表面を ∂D_0 とし，D 内の粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{X}$ で表すが，t＝t において，$\boldsymbol{X}$ が $\boldsymbol{x}$ に，D_0 が D に，∂D_0 が ∂D に移動したとすると，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$ であり，$\boldsymbol{F}=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}}$ は変形勾配と呼ばれる．今，D 上の微小表面積を da，その法線を $\boldsymbol{n}$，そこに働く表面応力（traction）を $\boldsymbol{t}$ とし，D 内の微小体積を dv，その密度を ρ，物体力を $\boldsymbol{b}$，粒子速度を $\boldsymbol{v}$ とすると，運動量保存則および角運動量保存則は，

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{t} da + \int_D \rho \boldsymbol{b} dv = \int_D \rho \dot{\boldsymbol{v}} dv \quad \cdots (1)$$

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{x} da + \int_D \rho \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{x} dv = \int_D \rho \boldsymbol{x} \times \dot{\boldsymbol{v}} dv \quad \cdots (2)$$

となる．また，Cauchy 応力 $\boldsymbol{T}$ と traction $\boldsymbol{t}$ との関係は，$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}$　となる．また角運動保存則から得られる $\boldsymbol{T}$ の対称性より，$\boldsymbol{T}^T=\boldsymbol{T}$ が成立する．次に，式(1)に，ガウスの発散定理 $\int_{\partial D} \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} da = \int_D div \boldsymbol{T} dv$　を適用すると，オイラー型の運動量保存則が次式のように得られる．

$$\rho \dot{\boldsymbol{v}} = div_x \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t) + \rho \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t) \quad \cdots (3)$$

これを，t＝0での $\boldsymbol{X}$ および t を独立変数とする従属変数の変換 $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{X}$ を行うことにより，ラグランジェ型の運動量保存則が次式のように得られる．

$$\rho_0 \ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X},t) = Div_X \boldsymbol{S}(\boldsymbol{X},t) + +\rho_0 \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X},t) \quad \cdots (4)$$

ここに，ρ_0 は t＝0での ρ であり，$\boldsymbol{S}$ は第1 Piola Kirchhoff ストレステンソルと呼ばれ，$\boldsymbol{T}$ との関係は，ヤコビアン J＝| $det\boldsymbol{F}$| を用いると，$\boldsymbol{S}=\mathrm{J}\,\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{-T}$ で与えられる．また $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^T$ より，$\boldsymbol{S}\boldsymbol{F}^T=\boldsymbol{S}\boldsymbol{F}^T$ である．

3．ナビヤ・ストークス方程式のラグランジェ表示　Newton の非圧縮性の線形粘性流体の構成方程式は，

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \mu \boldsymbol{D} \quad \cdots (5)$$

で与えられる．ここで p は不定圧力，$\boldsymbol{D}$ は歪速度テンサー，μ は粘性係数である．非圧縮の条件 $J=1$ と式（5）を用いると，$S=-p\boldsymbol{F}^{-T}+\mu \boldsymbol{D}\boldsymbol{F}^{-T}$　となる．この S を式（4）に代入して成分表示すると，

$$\rho_0 \ddot{x}_i = -p_{,K} X_{K,i} + \mu(\dot{x}_{i,K} X_{K,k} + \dot{x}_{k,i} X_{K,k})_{,K} + \rho_0 b_i \quad \cdots (6)$$

本報告では紙面の都合上，直交デカルト座標のみを考える．上式を展開して整理すると

$$\rho_0 \ddot{x}_i = -p_{,K} X_{K,i} + \mu \dot{x}_{i,Lk} X_{L,K} X_{K,k} + \rho_0 b_i \quad \cdots (7)$$

となる．さらに　$x_{k,K} X_{K,l} = \delta_{kl}$　を利用して，$X_{K,i} = (1/J)(\partial J/\partial x_{i,K})$ を使うと，式（7）は次のように書き換えることができる．

$$\rho_0 \ddot{x}_i = -p_{,K} \frac{\partial J}{\partial x_{i,K}} + \mu \dot{x}_{i,LK} \frac{\partial J}{\partial x_{k,L}} \frac{\partial J}{\partial x_{k,K}} + \rho_0 b_i \quad \cdots (8)$$

これが成分表示したラグランジュのナビヤ・ストークスの方程式である.

4．ラグランジェ型のナビヤ・ストークスの方程式の具体的な表現

$$\begin{aligned} J &= x_{1,1}(x_{2,2}x_{3,3} - x_{2,3}x_{3,2}) + x_{1,2}(x_{2,3}x_{3,1} - x_{2,1}x_{3,3}) \\ &+ x_{1,3}(x_{2,1}x_{3,2} - x_{2,2}x_{3,1}) \quad \cdots\cdots (9) \end{aligned}$$

であるから, 式 (8) の第一成分は

$$\begin{aligned} \rho_0\ddot{x}_1 &= -p_{,1}(\partial J/\partial x_{1,K}) - p_{,2}(\partial J/\partial x_{2,K}) - p_{,3}(\partial J/\partial x_{3,K}) \\ &+ \mu[\dot{x}_{1,LK}(\partial J/\partial x_{1,L})(\partial J/\partial x_{1,K}) + \dot{x}_{2,LK}(\partial J/\partial x_{2,L})(\partial J/\partial x_{2,K}) \\ &+ \dot{x}_{3,LK}(\partial J/\partial x_{3,L})(\partial J/\partial x_{3,K})] + \rho_0 b_1. \quad \cdots\cdots (10) \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \rho_0\ddot{x}_1 &= -(x_{2,2}x_{3,3} - x_{2,3}x_{3,2})\frac{\partial p}{\partial X_1} + (x_{2,1}x_{3,3} - x_{2,3}x_{3,1})\frac{\partial p}{\partial X_2} \\ &- (x_{2,1}x_{3,2} - x_{2,2}x_{3,1})\frac{\partial p}{\partial X_3} + \mu\mathcal{L}\dot{x}_1 \quad \cdots\cdots (11) \end{aligned}$$

となる. ここで線形作用素 $\mathcal{L}$ はラグランジェ型のラプラシアンであり,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\phi &= \{(x_{2,2}x_{3,3} - x_{2,3}x_{3,2})^2 + (x_{1,2}x_{3,3} - x_{1,3}x_{3,2})^2 \\ &+ (x_{1,2}x_{2,3} - x_{1,3}x_{2,2})^2\}\partial^2\phi/\partial X_1^2 + \{(x_{2,1}x_{3,3} - x_{2,3}x_{3,1})^2 \\ &+ (x_{1,1}x_{3,3} - x_{1,3}x_{3,1})^2 + x_{1,1}x_{2,3} - x_{1,3}x_{2,1})^2\}\partial^2\phi/\partial X_2^2 \\ &+ \{(x_{2,1}x_{3,2} - x2,2x3,1)^2 + (x_{1,1}x_{3,2} - x_{1,2}x_{3,1})^2 \\ &+ (x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1})^2\}\partial^2\phi/\partial X_3^2 \\ &- 2\{(x_{2,2}x_{3,3} - x_{2,3}x_{3,2})(x_{2,1}x_{3,3} - x_{2,3}x_{3,1}) \\ &+ (x_{1,2}x_{3,3} - x_{1,3}x_{3,2})(x_{1,1}x_{3,3} - x_{1,3}x_{3,1}) \\ &+ (x_{1,2}x_{2,3} - x_{1,3}x_{2,2})(x_{1,1}x_{2,3} - x_{1,3}x_{2,1})\}\partial^2\phi/\partial X_1\partial X_2 \\ &- 2\{(x_{2,1}x_{3,3} - x_{2,3}x_{3,1})(x_{2,1}x_{3,2} - x_{2,2}x_{3,1}) \\ &+ (x_{1,1}x_{3,3} - x_{1,3}x_{3,1})(x_{1,1}x_{3,2} - x_{1,2}x_{3,1}) \\ &+ (x_{1,1}x_{2,3} - x_{1,3}x_{2,1})(x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1})\}\partial^2\phi/\partial X_2\partial X_3 \\ &+ 2\{(x_{2,2}x_{3,3} - x_{2,3}x_{3,2})(x_{2,1}x_{3,2} - x_{2,2}x_{3,1}) \\ &+ (x_{1,2}x_{3,3} - x_{1,3}x_{3,2})(x_{1,1}x_{3,2} - x_{1,2}x_{3,1}) \\ &+ (x_{1,2}x_{2,3} - x_{1,3}x_{2,2})(x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1})\}\partial^2\phi/\partial X_1\partial X_3 \\ &\quad \cdots\cdots (12) \end{aligned}$$

である. 同様に残りの2成分は上の $\mathcal{L}$ を用いると,

$$\begin{aligned} \rho_0\ddot{x}_2 &= (x_{1,2}x_{3,3} - x_{1,3}x_{3,2})\frac{\partial p}{\partial X_1} - (x_{1,1}x_{3,3} - x_{1,3}x_{3,1})\frac{\partial p}{\partial X_2} \\ &+ (x_{1,1}x_{3,2} - x_{1,2}x_{3,1})\frac{\partial p}{\partial X_3} + \mu\mathcal{L}\dot{x}_2 \quad \cdots\cdots (13) \\ \rho_0\ddot{x}_3 &= -(x_{1,2}x_{2,3} - x_{1,3}x_{2,2})\frac{\partial p}{\partial X_1} + (x_{1,1}x_{2,3} - x_{1,3}x_{2,1})\frac{\partial p}{\partial X_2} \\ &- (x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1})\frac{\partial p}{\partial X_3} + \mu\mathcal{L}\dot{x}_3 \quad \cdots\cdots (14) \end{aligned}$$

とあらわせる.

5．おわりに　ここでは式の誘導のみにとどまったが, 今後, 簡単な例題を取り上げ, また境界層近似などの理論的近似法を併用し, 差分法などの数値解析法を用い具体的な計算を行う予定である.