

Boussinesq方程式による構造物近傍の非線形平面波の解析

名古屋工業大学 学生員○長嶋 禎泰

名古屋工業大学 正 員 喜岡 渉

1. はじめに 浅海域においては非線形平面波は弱い分散性を考慮するとBoussinesq方程式で記述される。Boussinesq方程式に基づく計算方法は、Abbott et al.(1978)に代表される差分方程式による数値解法とLiu et al.(1985)に代表されるように諸量を周波数についてフーリエ級数展開することによって得られる緩勾配方程式を解くスペクトル法の二つに分類することができる。差分法を短周期の波も対象とした一般的な平面波の変形解析に適用するためには、差分式の打ち切り誤差について3次のオーダーまでの計算精度を確保する必要があり、そのための計算アルゴリズムは煩雑なものとなっている。一方のスペクトル法では、3次のオーダーの非線形項の処理は厳密なものとなっているものの、空間的には差分法が用いられるので、構造物近傍の波動場の解析には適さない。本研究では、構造物近傍を含む非線形平面波の効率的な計算手法を検討するもので、有限要素を用いた汎用的な計算モデルの開発を目指すものである。

2. 基礎方程式 基礎方程式として水深に対して緩勾配を仮定したBoussinesq方程式を用いるものとする、運動方程式と連続式は次のように書き表すことができる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial t} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial t} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ (h + \eta)u \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ (h + \eta)v \} = 0 \quad (3)$$

ここに、 u, v は断面平均流速、 η は水位変動量、 h は水深、 g は重力加速度である。式(1)、(2)の右辺は、圧力に対する補正項であり、波頂曲率の影響が考慮されている。また入射波の代表振幅を a 、波数を k とすれば、式中の二つのパラメーター ε 、 μ^2 はそれぞれ次式で定義される。

$$\varepsilon = a/h, \quad \mu^2 = (kh)^2 \quad (4)$$

式(1)~(3)はこの二つのパラメーターがともに小さく、かつ同じオーダーであるという仮定下で導かれたもので、ここでは水深に対しては緩勾配 $O(\nabla h) < O(\varepsilon)$ を仮定している。

3. 有限要素方程式 有限要素としてここでは空間方向に対して、図-1に示す2次元シンプレックス要素を用いる。このとき、未知変数 ϕ の節点での値を Φ_i, Φ_j, Φ_k とし、3点の座標を (X_i, Y_i) 、 (X_j, Y_j) 、 (X_k, Y_k) とすれば、未知変数 ϕ は基底関数を用いて式(5)のように近似することができる。

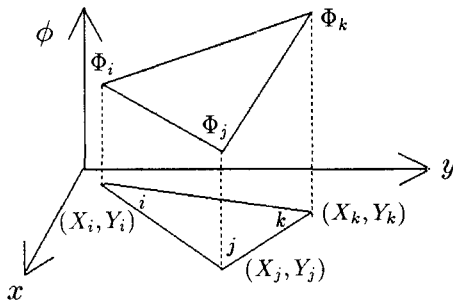


図-1 要素座標

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k \quad (5)$$

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] \quad (6)$$

$$\begin{cases} a_i = X_j Y_k - X_k Y_j \\ b_i = Y_j - Y_k \\ c_i = X_k - X_j \end{cases} \quad (i, j, k) = \{1, 2, 3\}$$

ここに、 A は三角形要素の面積である。ただし、このままでは、式(1)、(2)の右辺に含まれる空間方向への2階微分項に対して式(5)の近似式を用いることができない。

そこで弱形式を利用するために要素方程式の定式化の方法としてGalerkin法を用いる。まず、基礎方程式に対し重み関数をかけるが、この関数形を未知変数と同じく式(5)のようにとる。次に関数定義域で積分を

行うがこのとき2階微分項にグリーンの公式を適用することで、導関数の階数を下げることができる。こうして要素ごとに得られた要素方程式を重み関数に従って重ね合わせることで次式を得る。

$$\{[M] + \frac{h^2}{3}([U] + [W])\}\{\dot{u}\} = -[Q]\{u\}\{u\} - [R]\{v\}\{u\} - g[S]\{\eta\} \quad (7)$$

$$\{[M] + \frac{h^2}{3}([V] + [X])\}\{\dot{v}\} = -[Q]\{u\}\{v\} - [R]\{v\}\{v\} - g[T]\{\eta\} \quad (8)$$

$$[M]\{\dot{\eta}\} = [Q]\{H\}\{u\} + [R]\{H\}\{v\} + [Q]\{u\}\{\eta\} + [R]\{v\}\{\eta\} \quad (9)$$

4. 時間積分の計算 式(7)~(9)は時間に対して線形微分方程式となっている。この解法として差分法を用いて導関数を近似するやり方と時間領域内で定義される有限要素を用いる手法が普及しているが、ここでは前者に属するオイラーの前進差分を用いる。このとき時間に対する微分は

$$\dot{\phi} = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} \quad \phi \approx \phi^n \quad (10)$$

により近似される。

これにより、以下のような有限要素方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \{[M] + \frac{h^2}{3}([U] + [W])\}\{u^{n+1}\} \\ &= \{[M] + \frac{h^2}{3}([U] + [W])\}\{u^n\} - \Delta t[Q]\{u^n\}\{u^n\} - \Delta t[R]\{v^n\}\{u^n\} - g\Delta t[S]\{\eta^n\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \{[M] + \frac{h^2}{3}([V] + [X])\}\{v^{n+1}\} \\ &= \{[M] + \frac{h^2}{3}([V] + [X])\}\{v^n\} - \Delta t[Q]\{u^n\}\{v^n\} - \Delta t[R]\{v^n\}\{v^n\} - g\Delta t[T]\{\eta^n\} \end{aligned} \quad (12)$$

$$[M]\{\eta^{n+1}\} = [M]\{\eta^n \Delta t[Q]\{H^n\}\{u^n\} - [R]\{H^n\}\{v^n\} - [Q]\{u^n\}\{\eta^n\} - [R]\{v^n\}\{\eta^n\}\} \quad (13)$$

ここに、添字nは時間ステップを表す。上式(11)~(13)はすべて半陽解法となっているが、このままでは式(13)は解が不安定となり解を得ない(鄭、川原,1992)。そこで左辺の係数行列を集中化して次のようなアルゴリズムを用いる。

$$[M]\{\eta^{n+1}\} = [\tilde{M}]\{\eta^n \Delta t[Q]\{H^n\}\{u^n\} - [R]\{H^n\}\{v^n\} - [Q]\{u^n\}\{H^n\} - [R]\{v^n\}\{H^n\}\} \quad (14)$$

ここに $[\tilde{M}]$ は集中質量行列である。これは行列 $[M]$ を定義する基底関数を、区分的に定数である関数に置き換えることで得られ、元の微分方程式に対して固有値が常に大きくなることを避けることができる。また、右辺第1項に集中質量行列を用いると、計算が数値的不安定になるため、かわりに次のような係数行列 $[\tilde{M}]$ を用いている。

$$[\tilde{M}] = e[\bar{M}] + (1 - e)[M] \quad (15)$$

ここにeは選択係数で、計算の安定化と人工粘性による誤差を最小化するように決めるものであるが、ここでは $e=0.80$ とした。

5. おわりに 具体的な計算例としては、反射壁に沿って発達するステム波の解析を行った。解析結果については講演時に報告する。

参考文献

鄭 榮裕・川原睦人(1992):有限要素法によるBoussinesq方程式の解析, 第47回年次学術講演会概要集II, pp 622-623.

Abbott, M.B., H.M. Petersen and O. Stovgaard(1978): On the numerical modelling of short waves in a shallow water, J. Hydraulic Res., Vol.16, No.3, pp.173-204.

Liu, P.L.-F., S.B. Yoon and J.T. Kirby(1985): Nonlinear refraction-diffraction of waves in shallow water, J. Fluid Mech., Vol.153, pp.185-201.