

一方向波列におけるフーリエモードの変調とカオス

岐阜大学 正会員 安田孝志 学生会員○森 信人

[1. 緒言]

深海域に於ける非線形定常波である Stokes 波の安定性は、2 次元場においては Benjamin & Feir(1967) によって調べられ、理論、実験の両面からその不安定性が確認されている。その後、Yuen & Lake(1982) が Zakharov 方程式を用いた数値計算により、一様波列のフーリエモードの振舞いは、Fermi-Pasta-Ulam 再帰をする場合と非再帰となる場合があることを示した。さらに、Caponi *et al.*(1982) により、保存系に於いても 'Confined Chaos' と呼ばれる有限なフーリエモードの領域内で生じるカオス的な現象が報告されている。いずれの結果も少数自由度な系の場合であり、本研究では、多自由度系での深海域に於ける重力波のフーリエモードの振舞いについて、数値計算の結果を基に明らかにする。具体的には、West & Watson 方程式を用いることにより、非回転・非圧縮の仮定の下での深海に於ける重力波の振舞いについて検討を行う。

[2. 数値計算手法および精度]

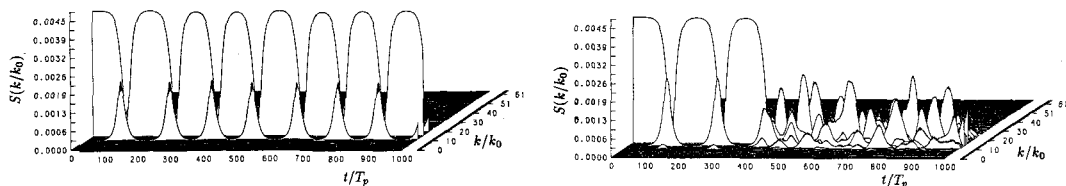
水表面を伝播する任意のスペクトルを持つ重力波に及ぼす 3 次の非線形干渉の影響を計算するため、計算時間の点から West & Watson 方程式を用いた。具体的には、非線形項については疑似スペクトル法を用い、時間発展は各フーリエ成分について 4 次の Runge-Kutta-Gill 法によって計算を行っている。精度については、Stokes 波の厳密解を初期波とした伝播計算を行い、1 周期毎の時間発展波形 η_n と初期波形 η_e の最大絶対誤差 $\varepsilon_1 = |\eta_e - \eta_n|_{max}$ の比較を行った。無限水深において $ak=0.20$ の Stokes 波を 100 周期伝播させた結果、 ε_1 の最大値は 4.5×10^{-3} であった。次に、初期波の全エネルギー $E(0)$ に対する各時間に於ける全エネルギー $E(t)$ との誤差を $\varepsilon_2 = |1 - E(t)/E(0)|$ の時間変化について検討した結果、 ε_2 の最大値は 2.1×10^{-5} であり、これらの結果より、数値解は十分な精度を持つと判断される。

[3. 準単色波に於けるフーリエモードの振舞い]

波形勾配 $a_p k_p$ を持つ Stokes 波は、 $|k| < 2\sqrt{2}k_p^2 a_p$ の領域に微小攪乱を与えた場合不安定となる (Benjamin & Feir, 1967)。そして、1 組の微小攪乱を i) $\sqrt{2}k_p^2 a_p < |k| < 2\sqrt{2}k_p^2 a_p$ の領域内に与えた場合、周期境界の下で FPU 再帰を示し、ii) $|k| \leq \sqrt{2}k_p^2 a_p$ の領域内に与えた場合には Complex な変化となることが知られている (Yuen & Lake, 1982)。FPU 再帰を示す場合には、変調が最も発達した場合の振幅は初期に対して最大 4 倍まで増幅することが明らかになっている (Tanaka, 1990)。しかし、Complex になる場合の振舞いについては、何も明らかになっていないのが現状である。

図-1 に、初期波を Stokes 波の厳密解とし、フーリエモードを 64 個、ピークモードは基本モードの 16 倍の位置に置き、ピークモードの $1/10000$ のエネルギーを持つ 1 組の微小攪乱を不安定領域 i) および ii) に与え、 $t/T_p=1000$ (T_p はピークモードの周期) させた場合のフーリエモードの時間変化を示す (図中の k_0 は、基本モードを、 k_p はピークモードを表す)。この場合、フーリエモードはそれぞれ、FPU 再帰と Complex な変化を示すことが分る。この時、Complex な場合には、初めの $t/T_p=350$ までは、準周期的な軌道変化を示しているが、 $t/T_p=400$ 前後で、ピークモードはエネルギーを急に失う。これは、いわゆる誘導現象と呼ばれ、不安定領域内に複数組のモードが励起された場合に生じるもので、誘導現象が生じた場合には、励起されたモードを通じて全モードへエネルギーが流れる可能性が有り得る (Saito, 1975)。この、エネルギーのカスケードは、波列の持つ非線形性が強くなれば、より進むと思われるが、 $ak=0.34$ で Benjamin-Feir の不安定領域が消滅することを考えると、ある程度の領域内で制限を受けるものと思われる。

図-2 に示すのは不安定領域 i) に 1 組、安定領域に 1 組の合計 2 組の攪乱を与えた場合のフーリエモードの時間変化であり、不安定領域 i) に攪乱を与えたのにも関わらず、フーリエモードは図-1(b) 同様、Complex な変化をしているのが分



(a) FPU 再帰の場合

(b) Complex な場合

図-1. 3 次以上の非線形干渉によるフーリエモードの時間変化

る。このことは、波列の持つ非線形の強さにも依るが、水表面を伝播する重力波に於いて不安定が生じた場合には、FPU再帰は特異な場合であり、一般的には Complex な変化が支配的であることを示している。

図-3 に示すのは、図-1 に示した Complex な場合の $t/T_p=1000$ の空間波形より得られた波数スペクトルであり、Complex な場合には、スペクトルが連続化し、エネルギーの分配が生じているのが分かる。勿論、エネルギーの分配は系のエルゴード性を示すものではないが、保存系に於いて非砕波の下での準単色波が、連続スペクトルを持ち得るという事実は、興味深いものと言える。次に、Complex なケースに於けるフーリエモードの振舞いが、ただ単に複数個の不安定なモードが存在するために生じているのか、もしくは系自体が現象を複雑にする内因を持っているのかという問題についての検討を行う。ここでは、隣接した解軌道の変化を示すセパレーションディスタンス $D(t)$ の時間変化を調べることにする。

$$D(t) = \sum_{i=0}^{64} |A_i(t) - A'_i(t)|^2 \quad (1)$$

ここで、

$$A'_p(0) = A_p(0) = A_p(0) \times 10^{-3}, \quad A'_i(0) = A_i(0), (i = 1, 2, \dots, 64)$$

ここに、 A_i は、フーリエ振幅を表す。図-4 に示すのが、図-1(b) のセパレーションディスタンスの時間変化である。図から分るように、 $D(t)$ の値は、時間と共に指数関数的に増加して行き、このことは位相空間に於ける二つの隣接した解軌道が、指数関数的に離れていくことを意味するものであり、図-1(b) に示した Complex なフーリエモードの変化は、単に複雑だけでなく、極めてカオス的であることが分る。さらに、 $t/T_p=800$ 以後はセパレーションディスタンスが一定値になっているのは、保存系であるため、解軌道の変化にも限界値が存在することを示す。より定量的な評価としては、保存系のカオスは散逸系と異なり、その幾何学的特性や強さを Strange Attractor や Poincaré 写像から図ることは出来ないため、リアプノフ指数を用いた検討が必要になると思われる。

【4. 結語】

以上、水表面伝播する重力波の伝播計算を行い、準単色波のフーリエモードの変化を調べることで、深海域での波の振舞いが本質的に複雑な内因を持つこと明らかにした。今後は、非線形性と分散性を変化させた場合の振舞いについて検討をして行くつもりである。

【参考文献】

- ◇ Caponi, E.A. et al. (1982) 'Instability and confined chaos in a nonlinear dispersion wave system', Phys. Fluids, Vol.25, pp.2159-2167.
- ◇ Saito, N. et al. (1975) 'The Induction Phenomenon and Ergodicity in the Anharmonic Lattice Vibration', J.Phys.Soc.Japan, Vol.39, No.6, pp.1430-1438.
- ◇ Tanaka, M. (1990) 'Maximum amplitude of modulated wave train', Wave Motion, Vol.12, pp.559-568.
- ◇ Yuen & B.M. Lake (1982) 'Nonlinear Dynamics of Deep-Water Gravity Waves', Advances in appl.Mech., Vol.22, pp.67-327.
- ◇ West, B.J., K.A. Brueckner & R.S. Janda (1987) 'A New Numerical Method for Surface Hydrodynamics', J.G.R., Vol.92, pp.11,803-11,824.

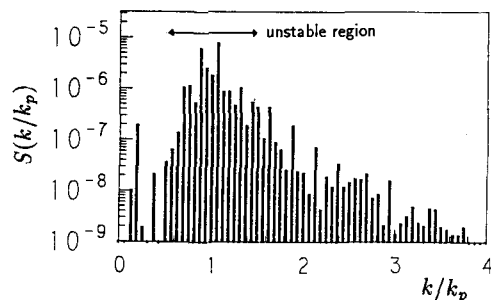


図-3. 図-1(b) の $t/T_p=1000$ 於けるパワースペクトル

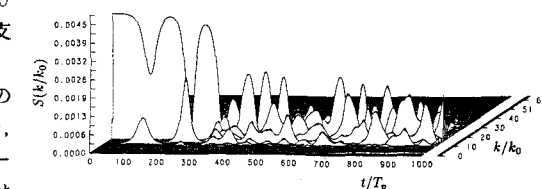


図-2. 初期に 2 組の攪乱を与えた場合のフーリエモードの時間変化

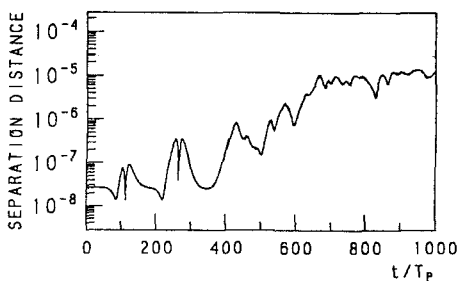


図-4. 図-1(b) のセパレーションディスタンスの時間変化