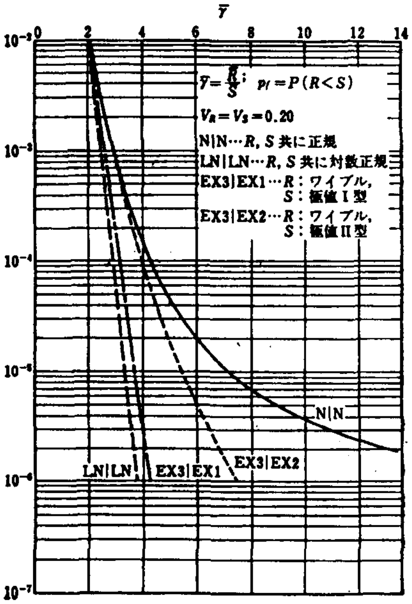
確率分布の設定に問題のある実例について

信州大学工学部　正員　長　　尚

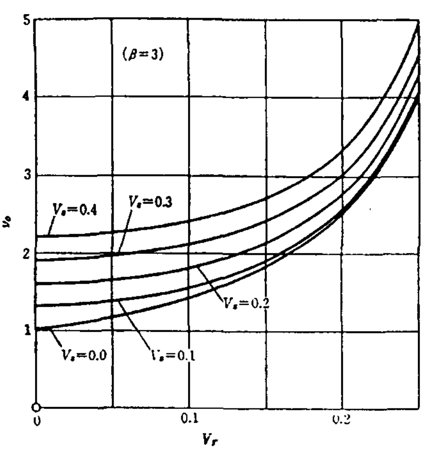
Ⅰ. まえがき　　先に筆者は、安全性評価のために確率分布を設定するに当って注意すべき点を指摘した[1]。今回はそのような注意に該当する実例を幾つか挙げて、不用意に確率分布を設定すると、非現実的な議論をするおそれがあることについて、具体的に説明する。

Ⅱ. 具体例1、2　　文献2) に種々な分布形に対する中央安全率$\overline{\gamma}$（$=\overline{R}/\overline{S}$）と破壊確率$p_f$［$=P(R<S)$］との関係を示した図（図－1）がある（具体例1）。確率変数を正規分布としたものは、その他の分布としたものとかなり違った性状を示している。特にp_fが5×10^{-4}（βでいうと3.3）付近から中央安全率が急激に増加している。文献3) には強度項と荷重項を共に正規分布とし、$\beta=3$とした場合の中央安全率ν_0について、強度項の変動係数を0～0.25の範囲で示している（図－2、具体例2）。この図では強度項の変動係数が0.2を越すと、中央安全率が急激に増加している。これらの2例はいずれも、強度項が負となる可能性がかなりある状況で、ある程度以上の安全性の水準を確保するために必要な中央安全率も示されていることになっている。強度項の下裾野の性状を確認せずにこのような結果を用いると、誤った設計もしくは結論となるので、十分注意しなければならない。



図－1 中央安全率$\overline{\gamma}$と破壊確率p_fとの関係

Ⅲ. 具体例3　　文献4) の中に既存橋梁の安全性をCornellの提案した信頼性指標β_Cで評価した計算例がある。これらの計算例はいずれも中央安全率が非常に大きく、結果としてβ_Cは$1/V_R$に近い値となっている。このような場合は信頼性指標に数値的な意味合いはない。強度項を正規分布としたことから必然的にそのような値になるだけで、他の確率分布とした場合には全く違った値となってしまう。一般的に言って中央安全率の大きい場合は、強度項の確率密度関数の下裾野の情報が正確でないと、安全性の数値的評価は不可能である。



図－2 中央安全率ν_0と強度項の変動係数の関係

Ⅳ. 具体例4　　文献5) では、強度項、荷重項共に対数正規分布とし、強度項の変動係数が0.5以上も含むものについて設計信頼性指標β_Dを3として論じている。しかし荷重項の確率分布がこのようなものであると確認してある訳ではない。変動係数はある程度データに基づいているが、確率分布は、単に公式があるから用いてあるにすぎない。変動係数の大きい対数正規分布はこの分布の下限値である0に近い値が発生する確率が高くなる[1]。一般に下限値である0付近のそのような性質を確認して対数正規分布としている訳でなく、対数正規分布を使用したから結果的にこのような性質を持つことになるのである。したがって本論文のような場合は、強度項の値が荷重項付近の値となる可能性を少なくさせるために必要以上に設計強度が高くなる。この論文のp.27

の図－6（$\overline{\alpha_f}=0.5$）において、$\triangle l/a=2$、$V_N=0.6$の場合の強度項の変動係数V_Rは式（11）から次のようになる。$V_R=\sqrt{(0.3\overline{\alpha_f})^2+(0.331+0.264\Delta l/a)^2V_N^2}=0.5368$　$\beta_D=3$、$V_S=0.1$としてあるから、安全係数F_R^*（中央安全率）はこの論文の式（5）から次のようになる。$F_R^*=\exp\{\beta\sqrt{V_R^2+V_S^2}\}=5.145$　この例では強度の平均値よりかなり小さい値が発生する可能性が高いので、$\beta_D=3$の安全性の水準を確保するために、中央安全率を高めなければならなくなる。ちなみに強度項の平均値の4分の1（1.286）以下に強度がなる確率は0.0062もある。一方破壊確率の水準は0.00135（$\beta=3$）である。この例では強度項を正規分布だとすると$\beta^U=1/V_R=1.86$となり、$\beta=3$の設計は不可能となる。下限値が負とならない対数正規分布はそのような欠点はないが、以上のような欠点を有する。比較のために強度項と荷重項の確率分布$D^{W1L}=[W\ (\lambda=1)\ \ L]^T$、$D^{W2L}=[W\ (\lambda=2)\ \ L]^T$（W：ワイブル分布、L：対数正規分布、$\lambda$：下限値が平均値－$\lambda$倍の標準偏差）として信頼性指標$\beta$を求めてみたところ、$\beta^{W1L}=14.2$、$\beta^{W2L}=1.73$となり、確率分布の設定により極端に信頼性指標$\beta$の値が異なる。ワイブル分布にも対数正規分布と同様に下限値の設定に慎重でなければならないことが伺える。

V. **具体例5、6**　文献6)、7）の論文はいずれも総期待費用最小化原則に基づいた最適安全性指標β_{opt}に関する論文で、荷重項を対数正規分布としている。また変動係数は1.0までであり、安全性指標も2〜3.5までの範囲で議論している。このように変動係数の大きい対数正規分布は、先に指摘した[1]ように確率密度関数の上裾野がなかなか0にならないという性質がある。これらの論文ではこのような性質を確認して対数正規分布とした訳ではない。単に扱い易いから用いてあるにすぎない。変動係数の大きい対数正規分布を使用したから結果的にこのような性質があることになっているのである。常識的にはこのような性質を持つ確率分布は特殊であると考えられる。したがって本論文のような場合は、必要以上に強度が高くなり、不適切な結論となる。なお対数正規分布とすることにこのような性質があるにしても、安全性は相対的に評価できれば良いから、差し支えないという意見もある。しかし総期待費用最小化原則に基づいた議論において、相対的な意味しかない破壊確率を用いると、この破壊確率が直接影響する期待損失費用の部分の相対性が初期費用の部分に比べて強くなり、最適安全性指標β_{opt}の解がずれることになる。これらの論文にある例で具体的に説明する。文献6）のp.23の図－3（具体例4）において、$V_S=0.6$、$C_F=50$の場合は、式（13）よりβ_{opt}は2.66で、中央安全率$\overline{\theta}$は5.19となる。ここでもし強度項、荷重項が共に正規分布であるとすると、この水準（$\beta=2.66$）の安全性の確保をするには、中央安全率は3.30でよい。荷重項の対数正規分布の前述の性質のために、そのような性質のない正規分布とした場合に比較して、実に57％（5.19／3.30＝1.57）も強度増が必要となっている。このような傾向のある対数正規分布を用いて、総期待費用最小化原則に基づく一般論をするのは適切でない。文献7）ではTable 2（具体例5）の中で、風荷重（変動係数は0.7）の場合、確率分布を対数正規分布とした式を用いて、最適信頼性指標β_{opt}を2であると結論している。この論文には確率分布を正規分布とした式も示されてあり、その場合の最適信頼性指標をβ_{opt}は2.6となる。信頼性指標βの値で30％も違えば、設計値もこの程度もしくはそれ以上の影響を受ける。設計の全体の水準を議論する場合に、こんな違いは無視し得るものではない。

参考文献　1）長尚：確率分布の設定について、土木学会第47回年次学術講演概要集Ⅰ、pp. 1218-1219、1992.　2）伊藤学・尾坂芳夫：設計論、彰国社、p. 223, 1974.　3）尾坂芳夫・高岡宣延・星谷勝：土木構造設計法、技法堂、pp. 59-60、1981.　4）㈱建設ｺﾝｻﾙﾀﾝﾂ協会近畿支部：信頼性理論の土木構造設計への2、3の応用、p. 121、1985.　5）松井謙二・落合英俊：限界状態設計法における摩擦杭の支持力評価、土と基礎、pp. 23-28、1992.　6）杉山俊幸・酒井利夫・藤野陽三・伊藤学：構造設計における信頼性レベル、土木学会論文報告集、第327号、pp. 21-28、1982.　7）Kanda,J.：Optimum Reliability for Probability-Based Structural Design, Jour. of the Faculty of Engineering, The Univ. of Tokyo, series B, 1990.