

FEM解析のための要素生成に関する一試み

信州大学工学部大学院

○森 晋

信大情報処理センター 正会員 大上 俊之

信州大学工学部

" 草間 孝志

1. まえがき 有限要素法を用いて数値解析を行う場合、解析領域の要素分割を必要とするが、この要素作成に関する作業に最も多くの労力が費やされるといっても過言ではない。それゆえ従来から要素生成に関する多くの研究がなされてきた。要素生成の方法は、1) 複素数 z 面と複素数 z 面との間に $z=f(\xi)$ なる関数関係を設定し、 ξ 面上の簡単な図形から z 面上の複雑な図形を生成する方法、2) ラグランジェ内挿多項式あるいはスプライン関数等の内挿関数を用いて解析領域内部の格子点を内挿する方法、3) 楕円形、双曲形あるいは放物形の偏微分方程式を数値的に解いて座標格子点を求める方法、4) ファジ理論にもとづく方法、の4つの方法に大別することができる。

さらに、線形関係を包含し、かつ極軸値が増大しても安定した内挿値が得られるような内挿関数の誘導と曲線の始点、終点、あるいは両者の点で1階導関数が0になる内挿関数を提案した。本文は、この内挿関数の応用例として、有限要素法のための要素生成について検討したもので、上記の2)の方法に属する。構造解析で取り扱う構造物の形状は比較的規則正しいものが多いことから、内挿関数を利用した要素生成法が有効な場合も多い。なお、本文で用いた内挿関数の詳細については、文献[4]を参照されたい。

2. 2次元境界領域への応用例(1)

図-1は、パラメータ $t_1(0 \leq t_1 \leq 4)$ 、 $t_2(0 \leq t_2 \leq 1)$ からなる $T(t_1, t_2)$ 平面を示す。いま、 t_1 に関する内挿関数を $\phi_i(t_1)$ ($i=0, 1, 2, 3, 4$)、 t_2 に関する内挿関数を $\psi_j(t_2)$ ($j=0, 1$)とし、 $\phi_i(t_1)$ には閉曲線内挿関数を、 $\psi_j(t_2)$ には一般の開曲線内挿関数を用いるものとする。なお、図中の点線の交点は内挿する節点を示す。次に、 $T(i, j)$ に対応する解析領域の境界上の8点の (x_i, y_j) (表-1参照)を与えると、内挿により細分化された解析領域内の節点座標 (x, y) は

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^1 \phi_i(t_1) \psi_j(t_2) x_{ij} \\ y &= \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^1 \phi_i(t_1) \psi_j(t_2) y_{ij} \end{aligned} \right\} (1)$$

で与えられる。要素分割を図-2に示す。

3. 2次元境界領域への応用例(2)

前述の例えば $\phi_i(t_1)$ は t_1 のみの関数で、 t_2 の値には依存しなかったが、図-3に示す領域 $(0, 0) \sim (1, 1)$ の $T(t_1, t_2)$ 平面の $t_2=0$ の a 線上の内挿関数 $\phi^*(t_1)$ と $t_2=1$ の b 線上の

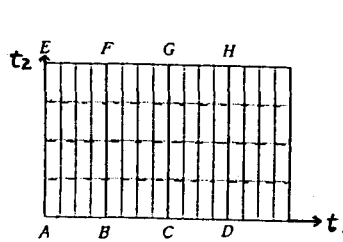


図-1

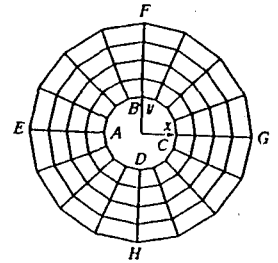


図-2

表-1

節点	A	B	C	D	E	F	G	H
(t_1, t_2)	(0, 0)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(0, 1)	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)
(x, y)	(-1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(0, -1)	(-3, 0)	(0, 3)	(3, 0)	(0, -3)

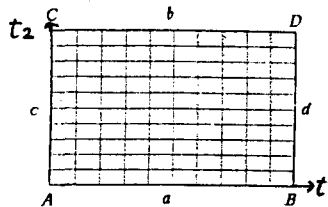


図-3

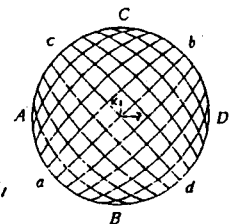


図-4

内挿関数 $\phi_i(t_1)$ とが異なる場合の例を次に示す。なお、 $\phi_i(t_2)$ についても同様である。用いた内挿関数は表-2を満たすものとし、境界上の座標を表-3とすると、内挿により細分化された解析領域内の節点座標 (x, y) は

$$\left. \begin{aligned} x &= \phi_0^a \psi_0^c x_{00} + \phi_0^b \psi_1^c x_{01} \\ &\quad + \phi_1^a \psi_0^c x_{10} + \phi_1^b \psi_1^c x_{11} \\ y &= \phi_0^a \psi_0^c y_{00} + \phi_0^b \psi_1^c y_{01} \\ &\quad + \phi_1^a \psi_0^c y_{10} + \phi_1^b \psi_1^c y_{11} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となる。この方法は、図-4に示すように円形境界の内部の要素分割に役立つ。この例の場合得られた節点数121、要素数100、計算時間はDOS上のBASICで14秒である。なお、同じ座標値のもとで、表-4を満たす内挿関数を用いて、式(1)を適用すると図-5が得られる。

4. 3次元境界領域への応用例

前述までの要素のパラメータは t_1 と t_2 であったが、さらにパラメータ t_3 を導入すれば、立体要素の生成に拡張することができる。三木他はThompsonが開発したボアソン方程式を用いた要素生成法を応用として燃焼ガスの流れ解析を行っている。図-6は、三木他の要素図を参照して、本法により作成した要素分割図である。この例の場合、座標値を与えた節点の数は32である。図-7は、さらに複雑な境界形状に対する例として、三角形ネジからなるナットの模式図の要素分割図である。

5. むすび 本報告は、さきに求めた有限フーリエ級数にもとづく内挿関数を有限要素法のための要素生成法に応用したものである。この内挿関数は容易に円または楕円を表現することができるゆえ、ここに示したような形状に関しては要素生成も容易である。内挿関数を用いた要素生成法は計算時間が短い反面、内挿関数による要素生成法の欠点であるところの全ての領域にわたって滑らかな格子を設けることが難しいことがある。

参考文献 1)Thompson, J. F. et al.: Numerical Grid Generation, North-Holland, 1985. 2)Thompson, J. F. et al.: Automatic Numerical of Generation of Body-Fitted Curvilinear coordinate System for Field Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies, J. Comput. Phys., Vol. 15, 1974. 3)矢川元基:有限要素法の応用に関する2,3の課題, 応用数理, Vol. 2, No. 1, 1992. 4)草間孝志, 他:有限フーリエ級数を用いた内挿関数の改良, 土木学会論文集, No. 446/1-19, 1992. 5)Miki, K. J. Comput. Phys., Vol. 53, 1984.

表-2

座標	曲線a	曲線b	曲線c	曲線d
x	始点直交	終点直交	始点直交	終点直交
y	終点直交	始点直交	終点直交	始点直交

表-3

節点	A	B	C	D
(t_1, t_2)	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)
(x, y)	(-2, 0)	(0, -2)	(0, 2)	(2, 0)

表-4

座標	曲線a, b	曲線c, d
x	始点直交	始点直交
y	終点直交	終点直交

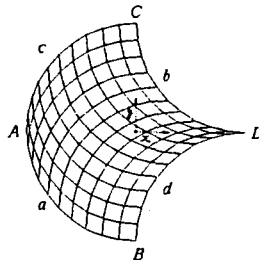


図-5

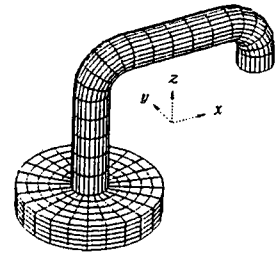


図-6

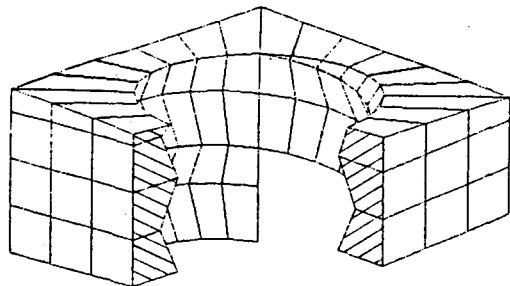


図-7