

スプライン帯板法を用いた積層板の 振動解析について

大同工業大学 学会員 ○鬼頭博史

大同工業大学 正会員 水澤富作

1. はじめに 高い比剛性や比強度を持つ繊維強化複合材料 (FRP) は、軽量化、耐衝撃性、耐熱性や減衰特性などに優れ、以前から航空宇宙や自動車産業などで広く用いられている。このような複合積層板は、強い異方性、面内剛性や曲げ剛性に比較してかなり小さな横せん断剛性を示すので、薄板でも横せん断変形の影響が重要になる。強化繊維の配向角が 0° と 90° の組み合わせから成る対称クロス・プライ積層板では、曲げと面内挙動の連成効果が生じない¹⁾。

本研究では、このような対称積層複合板の振動解析への横せん断変形と回転慣性の影響を考慮した YNS 積層板理論²⁾に基づくスプライン帯板法の適用性について検討し、また対称クロス・プライ積層板の振動特性に与える積層数や弾性係数比などの影響を解析している。

2. 解析手法 Fig. 1 に示す積層複合板の振動解析を行うために、YNS 積層板理論に基づくスプライン帯板法により式の定式化を行っている。この対称クロス・プライ積層板では、各積層 (ミナ) が直交異方性材料から成り、それぞれ完全に接着しているものと仮定する。材料主軸 (1, 2) 方向の弾性係数を E_1, E_2 , せん断係数を ν_{12} 及びせん断弾性係数を G_{12}, G_{13}, G_{23} で表す。対称積層構造より、次式で定義される曲げ剛性 D_{ij} と横せん断剛性 A_{ij} のみを考慮する。

$$D_{ij} = (1/3) \sum Q_{ij}^{(n)} (h_n^3 - h_{n-1}^3); \quad i, j = 1, 2, 6, \quad A_{ij} = \kappa_{ij} \sum Q_{ij}^{(n)} (h_n - h_{n-1}); \quad i, j = 4, 5 \quad \dots (1)$$

ただし、 κ_{ij} はせん断修正係数、 $Q_{ij}^{(n)}$ は (n) 層での弾性係数、 h_n は板中央面からの各積層面までの距離である。また、対称クロス・プライ積層構造では、 $D_{16} = D_{26} = A_{45} = 0$ である。

スプライン帯板要素の変位関数は、固有関数、 Y_m とスプライン関数を用いて次式で仮定する。

$$\theta_x = \sum \sum A_{mn} N_{n,k}(y) Y_m(x), \quad \theta_y = \sum \sum B_{mn} N_{n,k}(y) Y_m(x), \quad W = \sum \sum C_{mn} N_{n,k}(y) Y_m(x) \quad \dots (2)$$

ここで、 $k-1$ はスプライン関数の次数、 $N_{n,k}$ は正規化された B-スプライン関数である。

対称クロス・プライ積層板のひずみエネルギー、 U と運動エネルギー、 T は、次式で表される。

$$\begin{aligned} U = & (1/2) \iint [A_{44}(W,y)^2 + A_{55}(W,x)^2 + 2A_{44}(W,y)(\theta_y) + 2A_{55}(W,x)(\theta_x) + A_{55}(\theta_x)^2 \\ & + A_{44}(\theta_y)^2 + D_{11}(\theta_{x,x})^2 + D_{66}(\theta_{x,y})^2 + 2D_{12}(\theta_{y,y})(\theta_{x,x}) + 2D_{66}(\theta_{x,y})(\theta_{y,x}) \\ & + D_{22}(\theta_{y,y})^2 + D_{66}(\theta_{y,x})^2] dx dy, \\ T = & (\omega^2/2) \iint [M_1 W^2 + M_2 \{ (\theta_x)^2 + (\theta_y)^2 \}] dx dy \quad \dots (3) \end{aligned}$$

ただし、 ρ は密度関数を示し、 $M_1 = \sum \rho_n (h_n - h_{n-1})$, $M_2 = (1/3) \sum \rho_n (h_n^3 - h_{n-1}^3)$ であり、 ρ は密度、 ω は円振動数 (rad/sec) である。したがって、全ひずみエネルギーを最小化すれば、基礎方程式が導かれる。なお、相対する 2 辺が単純支持された場合には、固有関数の直交性により、各級数項ごとに固有値解析が行える。

3. 数値計算例及び考察 ここでは、相対する 2 辺が単純支持された対称クロス・プライ積層板の振動特性に与える積層数、弾性係数比、幅厚比や境界条件などの影響について解析する。数値計算で用いた複合材は、ゲラフイト/エポキシの一方強化材であり、次のような材料特性を仮定している。 $E_1/E_2 = 1 - 40$, $G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.6$, $G_{23} = 0.5$, $\nu_{12} = 0.25$ 。なお、せん断修正係数には $\kappa_{44} = \kappa_{55} = 5/6$ を用いた。Table 1 では、他の 2 辺が固定され、3 層からなるクロス・プライ積層板 ($E_1/E_2 = 40$, $a/b = 1.0$, $h/a = 0.1$) の振動数パラメータ、

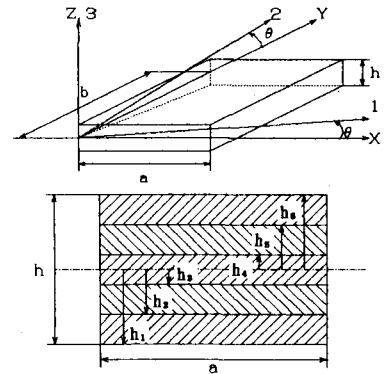


Fig. 1 Symmetrically cross-ply laminated plate and co-ordinate systems

$n^* = \omega a^2 \sqrt{\rho h^2/E_2}$ の収束性と精度が示されている。ここで、帯板要素の分割数, M_r は2から12まで変化させている。また, Khdeirら³⁾ の伝達マトリクス法による結果も示してある。これより、高次のスプライン帯板モデルを用いれば、少ない要素数でも安定した収束状態が得られる。横せん断変形を無視した薄板理論(CPT)の結果は、かなり過大評価した結果になっている。

Table 2 では、相対する2辺が種々の境界条件を持つ3層(90°/0°/90°)の積層板($E_1/E_2=40$, $a/b=1.0$)の振動数の精度比較が示されている。他の手法による結果と比較して、非常に良く一致している。

Fig. 2では、それぞれ相対する2辺が固定(CC)と固定-自由(CF)の正方形積層

板($a/h=10$)の振動数 n^* に与える積層数, N の影響が示されている。これより、弾性比, E_1/E_2 が増大すると、振動数 n^* も増大してくる。しかしながら、自由の境界条件を持つ場合には、積層数の増大とともに、減少している。この影響は、Fig 3で示すように、幅厚比, a/h を変化させた場合にも見られる。したがって、自由の境界条件を持つ対称クロス・プライ積層板では、単純に積層数を増しても振動数が増大しないので、設計上注意が必要である。

4. あとがき 一次せん断変形理論に基づくスプライン帯板法を用いて、対称クロス・プライ積層板の振動解析を行い、次のような結果が得られた。1). 高次のスプライン帯板要素を用いれば、少ない要素数で安定した収束値と精度が得られる。2). 対称クロス・プライ積層板の振動数に与える積層数, N , 弾性係数比, E_1/E_2 や幅厚比, a/h の影響は大きく見られるが、その大きさは境界条件にも依存している。

参考文献 1). Craig, T.J. and Dawe, D.J.: Flexural vibration of symmetrically laminated composite rectangular plates including transverse shear effects. IJSS, vol. 22, pp. 155-169 (1986). 2). Yang, P.C. et al.: Elastic wave propagation in heterogeneous plates. IJSS, vol. 2, pp. 665-684(1966). 3). Khdeir, A.A. et al.: Analysis of symmetric cross-ply laminated elastic plates using a higher-order theory - Part II Buckling and free vibration. Composite Structures, vol. 9, pp. 259-277(1988).

Table 1 Convergence study of frequency parameters, $n^* = \omega a^2 \sqrt{\rho/h^2 E_2}$ of three layer laminated plate (90°/0°/90°) with the CC; $E_1/E_2=40$, $a/b=1.0$, $a/h=10$

k-1 M _r		Modes				
		1	2	3	4	5
3	2	19.689	25.363	38.657	40.939	44.265
	4	19.670	25.350	38.650	39.123	42.621
	6	19.669	25.349	38.650	39.084	42.587
	12	19.669	25.349	38.650	39.082	42.585
5	2	19.670	25.350	38.650	39.045	42.595
	4	19.669	25.349	38.650	39.082	42.585
	12	19.669	25.349	38.650	39.082	42.585
	12	19.669	25.349	38.650	39.082	42.585
FSDT*		19.669	25.349	38.650	-	-
HSDT**		19.500	25.165	38.221	-	-
CPT***		40.743	45.233	59.023	-	-

* FSDT=First-order shear deformation theory³⁾.
** HSDT=High-order shear deformation theory³⁾.
*** CPT=Thin plate theory³⁾.

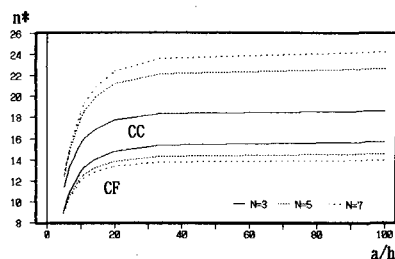


Fig. 3 The effect of the plate thickness ratio, a/h on frequency parameters, n^* of cross-ply laminated plates with the different boundary conditions and number of lamina, N ; $E_1/E_2=30$, $a/b=1.0$

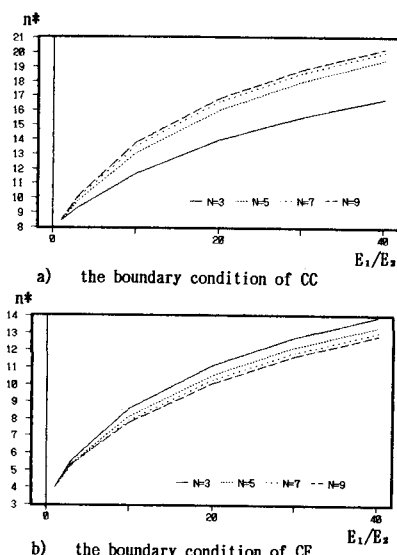


Fig. 2 The effect of the number of lamina, N on frequency parameters, n^* of cross-ply laminated plate; $a/h=10$, $a/b=1.0$

Table 2. Comparison of the first frequency parameter, $n^* = \omega a^2 \sqrt{\rho/h^2 E_2}$ of three layer laminated plate (90°/0°/90°); $k=1=5$, $M_r=12$, $E_1/E_2=40$, $a/b=1.0$

a/h Methods	SS	SC	CC	FF	FS	FC	
2.0	FSDT*	5.205	5.211	5.257	2.982	3.273	3.643
	HSDT**	5.205	5.211	5.257	2.982	3.273	3.643
	HSDT***	5.158	5.163	5.198	2.910	3.214	3.577
5.0	FSDT	10.290	10.646	11.266	4.053	4.544	5.937
	HSDT	10.290	10.646	11.266	4.053	4.544	5.937
	HSDT	10.240	10.756	11.164	4.025	4.518	5.897
10.0	FSDT	14.766	17.175	19.669	4.343	4.914	7.331
	HSDT	14.766	17.175	19.669	4.343	4.914	7.331
	HSDT	14.725	17.069	19.500	4.334	4.906	7.310
20.0	FSDT	17.516	23.625	30.032	4.427	5.029	7.984
	HSDT	17.517	23.625	30.032	4.423	5.024	7.983
	HSDT	17.497	23.545	29.870	4.415	5.011	7.969

* FSDT=First-order shear deformation theory³⁾.
** HSDT=High-order shear deformation theory³⁾.