スプラインレイヤー法を用いた長方形厚板の振動解析について

大同工業大学大学院　学生員　○ 高木信治
大同工業大学工学部　正会員　　水澤富作

1.　はじめに　　板厚が増大するにしたがって、薄板理論では無視される横せん断変形、回転慣性や板厚方向の成分や板の上下面の境界条件などの影響が重要になってくる。三次元弾性理論に基づく長方形厚板の振動解析として、SRINIVASらの厳密解法[1]やCHEUNGらの有限レイヤー法[2]などの数値解析法が挙げれるが、ごく限られた問題にしか適用されていないように思われる。

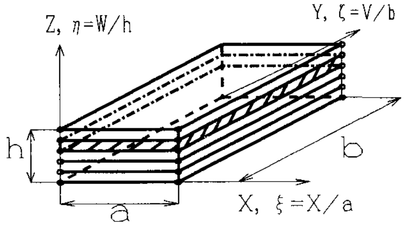
本研究では、三次元弾性理論に基づくスプラインレイヤー法を用いて周辺単純支持された長方形厚板の自由振動解析を行い、解の収束性、精度などの数値安定性について検討を行っている。このような長方形厚板の振動特性に与える板厚比、辺長比やポアソン比などの影響について解析している。また、ミンドリン板理論による数値解[3]との比較も行っている。

2.　解析方法　　図-1に示すような周辺単純支持された長方形厚板の振動解析を行うために、三次元弾性理論に基づくスプライン レイヤー法を用いて、式の定式化を行っている。このスプライン次数を高めれば、任意の高次のレイヤーモデルが導ける。なお、定式化にあたり次式のような無次元座標系を用いる。

$$\xi = X/a,\quad \eta = Y/b,\quad \zeta = Z/h \qquad \ldots (1)$$

レイヤー要素におけるX、Y、Z方向の変位関数u、v、wは、次式で仮定される。

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{s}[N]\overline{X}_m(\xi)Y_n(\eta)\{\delta_A\}_{mn} \\ v &= \sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{s}[N]X_m(\xi)\overline{Y}_n(\eta)\{\delta_B\}_{mn} \\ w &= \sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{s}[N]X_m(\xi)Y_n(\eta)\{\delta_C\}_{mn} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$



図－1　スプラインレイヤーモデル及び座標系

ここで, $[N] = [N_{1,k}(\zeta), N_{2,k}(\zeta), \ldots, N_{iz,k}(\zeta)]$ 、$X_m(\xi)=\sin(m\pi\xi)$, $\overline{X}_m(\xi)=\cos(m\pi\xi)$、$Y_n(\eta)=\sin(n\pi\eta)$, $\overline{Y}_n(\eta)=\cos(n\pi\eta)$、$i_z=k-1+Mz$, $\{\delta_A\}_{mn}=\{A_1,\ A_1.,\ A_{iz}\}_{mn}^T$、$\{\delta_B\}_{mn}=\{B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{iz}\}_{mn}^T$、$\{\delta c\}_{mn}=\{C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{iz}\}_{mn}^T$である。また, $Xm(\xi)$, $Yn(\eta)$, $\overline{X}_m(\xi)$, $\overline{Y}_n(\eta)$は、それぞれ与えられた境界条件を満たした固有関数である。$N_{iz,k}(\zeta)$は, 正規化されたB-spline関数であり、k-1はB-スプライン関数のスプライン次数、M_zはZ方向の Layer要素の分割数である。rとsは、固有関数の級数の項数である。三次元弾性体の全ポテンシャルエネルギー(汎関数)を示すと、次式で与えられる。

$$\Pi = \iiint \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV - \frac{\rho\omega^2}{2}\iiint (u^2+v^2+w^2)dV \qquad \cdots\cdot (3)$$

ここで $\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \gamma_{xy}\ \gamma_{yz}\ \gamma_{zx}\}^T$, $\{\sigma\}=\{\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{xy}\ \tau_{yz}\ \tau_{xz}\}^T$ ，またρは長方形厚板の密度であり, ωは円振動数(rad/sec)である。したがって、式（2）を上式に代入し、汎関数を最小化すれば、運動方程式が導ける。各級数ごとに固有値解析を行えば、長方形厚板の振動数および振動モード形状が求められる。

3.　数値計算例及び考察　　2方向に仮定した固有関数の直交性を利用して, 3次元弾性問題を1次元化したスプラインレイヤー法の周辺単純支持厚板の振動解析への適用性について示す。はじめに、本手法を用いて、厚板及び薄板の振動数の収束性に与えるスプライン次数, k-1とレイヤー要素の分割数, Mz の影響について検討したが、幅厚比, a/hに関係なくかなり少ない要素数でも厳密解に収束している。表-1には、厳密解[1]が与えられている正方形厚板(a/b=1, E=1, ν=0.3, ρ=1) の振動数(Hz)の精度比較が示してある。ここで、

k-1=3, Mz=4を用いている。また10層に分割した有限レイヤー法の解[2]も示してある。これより、厳密解に完全に一致した結果が得られている。三次元要素を薄板に直接適用した場合に, ロッキング問題が生じてくる。表-2には正方形薄板(a/b=1.0, Mz=4)のロッキング照査した結果が示してある。これより、ロッキング問題が見られず、薄板理論の解と一致している。なお解析値は振動数ﾊﾟﾗﾒｰﾀ, $n^*=\omega b^2\sqrt{\rho h/D}$ で示してある。次に, 表-3には本手法とMindlin板理論[3]による解の精度比較が示してある。また、長方形厚板(a/b=2.0, k-1=3, Mz=4)の振動数ﾊﾟﾗﾒｰﾀに与える幅厚比の影響も示してある。これより, 板厚がかなり増大しても、Mindlin 板理論でも精度よく曲げﾓｰﾄﾞの振動数が求められるが、Mindlin 板理論では表せない厚さ方向のﾓｰﾄﾞが現れてくる。周辺単純支持された厚板では、薄板理論では無視される板上、下面の自由表面を有しているので, ﾎﾟｱｿﾝ比の影響が表れてくる。 正方形厚板(a/h=2.5, Mz=4, k-1=3)の振動ﾊﾟﾗﾒｰﾀに与えるﾎﾟｱｿﾝ比, ν の影響が表-4に示してある。これより、ﾎﾟｱｿﾝ比が増大すると, 振動数パラメータは減少してくるが、2次 ﾓｰﾄﾞからの厚さ方向のﾓｰﾄﾞに顕著な変化が見られ、その ﾓｰﾄﾞ形状がﾎﾟｱｿﾝ比の影響を大きく受けている。

表－1 正方形厚板の振動数, ω (Hz)の精度比較
a/b=1.0, k-1=3, Mz=4, E=1.0, ρ=1.0

a/h	Method	Mode 1st	2nd	3rd	4th
5.0	Present	0.1688	0.3707	0.3707	0.4385
	F.L.M[2]	0.1690	0.3714	0.3714	0.4385
	Exact[1]	0.1688	0.3707	0.3707	0.4385
2.5	Present	0.2687	0.4385	0.5182	0.5182
	F.L.M[2]	0.2692	0.4385	0.5197	0.5197
	Exact[1]	0.2687	0.4385	*	*

表－2 薄板への適用性の検討; a/b=1.0, ν=0.3, $n^*=\omega b^2\sqrt{\rho h/D}$

Mz	幅厚比 a/h	k-1 2	3	4
4	10^1	19.0903	19.0901	19.0901
	10^2	19.7323	19.7323	19.7323
	10^3	19.7402	19.7403	19.7389
薄板理論		19.74		

表-3 幅厚比が固有振動ﾊﾟﾗﾒｰﾀ, $n^*=\omega b^2\sqrt{\rho h/D}$ に与える影響;
a/b=2.0, k-1=3, Mz=4, ν=0.3

幅厚比 a/h	Method	Modes 1st	2nd	3rd	4th	5th
5.0	Present	9.621	13.95	18.00	19.97	22.76
	Mindlin	9.518	13.75	*	19.61	*
		(1,1,1)	(2,1,1)	(1,1,2)	(3,1,1)	(2,1,2)
2.5	Present	6.725	8.998	9.122	11.38	12.26
	Mindlin	6.579	*	8.891	*	11.91
		(1,1,1)	(1,1,2)	(2,1,1)	(2,1,2)	(3,1,1)
1.25	Present	3.934	4.499	4.748	5.104	5.154
	Mindlin	3.221	*	*	4.745	*
		(1,1,1)	(1,1,2)	(1,1,3)	(2,1,1)	(1,1,4)

(I, J, K)は、それぞれx方向, y方向, z方向のﾓｰﾄﾞ次数を表す

表－4 振動ﾊﾟﾗﾒｰﾀ, $n^*=\omega b^2\sqrt{\rho h/D}$ に与えるﾎﾟｱｿﾝ比の影響; a/b=1.0, a/h=2.5, k-1=3, Mz=4

ν	Modes 1st	2nd	3rd	4th	5th
0.0	14.70	27.21	29.10	29.10	38.48
	(1,1,1)	(1,1,2)	(1,2,1)	(2,1,1)	(1,1,3)
0.2	14.25	24.33	27.77	27.77	37.87
	(1,1,1)	(1,1,2)	(1,2,1)	(2,1,1)	(2,2,1)
0.3	13.95	22.76	26.90	26.90	35.99
	(1,1,1)	(1,1,2)	(1,2,1)	(2,1,1)	(1,2,2)

3. あとがき 本研究で得られた主な結果を示すと、以下のようになる。

1). スプラインレイヤー法を用いれば、統一的に厚板から薄板の振動解析ができる。

2). 板厚の増大にともない、低次の振動ﾓｰﾄﾞにも厚さ方向の変形ﾓｰﾄﾞが表れる。また、板上, 下面の自由表面の影響とﾎﾟｱｿﾝ比の影響が表れる。今後、層状板構造への適用についても検討して行きたい。 なお、本研究は, 平成4年度大同工業大学研究援助金を受けている。

参考文献 1). S. Srinivas et al. 1970 J. Sound Vib., 12(2), 187-199, A exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates.
2). Y.K. Cheung et al. 1972 J. Sound Vib., 21(3), 277-284, Free vibration of thick, layered rectangular plates by a finite layer method. 3). 水澤 1992 構造工学における数値解析法ｼﾝﾎﾟ. 16, 209-214. 長方形Mindlin板の振動解析へのSpline帯板法の適用について.