有限変形弾粘塑性構成式による有限要素解析

岐阜大学　正会員　岡 二三生
岐阜大学　正会員　八嶋　厚
○岐阜大学大学院　学正員　小原　到

1. まえがき

本解析では、微小ひずみの枠組みにおいて、既に提案されている正規圧密粘土及び過圧密粘土の弾粘塑性構成式1)、2)を、有限変形理論を用いて拡張し、さらに数値解析における解の安定性を向上するために、一次の陰的差分法を用いて変形した。そして、この構成式を有限要素法に組み込み、一要素の土供試体について平面ひずみ圧縮試験および、Simple shear 試験を解析した。
そして、完全陰的差分法にしたがって誘導された構成式を用いた解析から、Euler法にしたがって誘導された構成式を用いた解析まで、構成式を誘導する際の手法の違いによる解析結果の影響について詳しく考察した。

2. 一次の陰的差分法を用いた有限変形弾粘塑性構成式の誘導

有限変形理論に基づいた有限要素法では、速度形の釣合式を解くために Updated Lagrange法を用いた。また、客観性のある応力速度として、本研究では、Kirchhoff応力のJaumann rateを用た。
以下に正規圧密粘土の有限変形弾粘塑性構成式の誘導を行う。
なお、Kirchhoff応力のJaumann rateを記号 t^* で、Cauchy応力を記号 σ で、また、各物理量の速度は、上にドットを付けて記した。
弾性ストレッチングと弾性応力速度の間には次に示す関係を仮定する。

$$t^*_{ij} = L^e_{ijkl}(D_{kl} - D^{vp}_{kl}) \tag{1}$$

ここで、L^e_{ijkl}；弾性剛性マトリツクス、 D_{kl} ；ストレッチングテンソル
（ D_{kl} は弾性ストレッチングテンソル D^e_{kl}，塑性ストレッチングテンソル D^{vp}_{kl} の和として次式で定義される。　$D_{kl} = D^e_{kl} + D^{vp}_{kl}$　）
正規圧密粘土では関連流れ則に基づいた定式化を行っている。よって塑性ストレッチングテンソルは次式で与えられる。

$$D^{vp}_{ij} = \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \qquad ここで、\quad \langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{for } F \le 0 \\ \Phi(F) & \text{for } F > 0 \end{cases} \tag{2}$$

(2)式より塑性体積ひずみ増分を求めると次式を得る。

$$\Delta V^{vp} = \Delta t \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ii}} \tag{3}$$

また、$\langle\Phi(F)\rangle$ の時間微分を取り次式を得る。

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} t^*_{ij} + \frac{\partial \Phi}{\partial V^p} \dot{V}^p \qquad ここでは右の関係を利用した。\quad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\dot{\sigma} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} t^* \tag{4}$$

(4)式より、$\langle\Phi(F)\rangle$ の増分を求めると次式となる。

$$\Delta\Phi(F) = \Phi(F)_{t+\Delta t} - \Phi(F)_t = \Delta t\,\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi(F)}{\partial \sigma_{ij}} t^*_{ij} \Delta t + \frac{\partial \Phi(F)}{\partial V^p} \Delta V^p \tag{5}$$

本解析では、$\langle\Phi(F)\rangle$ に一次の陰的差分法を適用したが、この関係式は次式で定義される。

$$\Phi(F) = (1-\theta)\Phi(F)_t + \theta\,\Phi(F)_{t+\Delta t} \tag{6}$$

(6)式に、(5)式を代入して次式を得る。

$$\Phi(F) = (1-\theta)\Phi(F)_t + \theta\left\{\Phi(F)_t + \frac{\partial \Phi(F)}{\partial \sigma_{ij}} t^*_{ij} \Delta t + \frac{\partial \Phi(F)}{\partial V^p} \Delta V^p\right\} \tag{7}$$

(7)式に、(3),(1),(2)式をこの順に代入して次式を得る。

$$\Phi(F)\left[1+(\theta\Delta t)\left\{\frac{\partial\Phi(F)}{\partial\sigma_{ij}}L^{e}_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}-\frac{\partial\Phi(F)}{\partial V^{p}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{pp}}\right\}\right]=\Phi(F)_t+\theta\Delta t\frac{\partial\Phi(F)}{\partial\sigma_{ij}}L^{e}_{ijkl}D_{kl} \tag{8}$$

上式において、次式(9)に示すような置き換えをして、(2)式(1)式の順に代入する。

$$\left[1+(\theta\Delta t)\left\{\frac{\partial\Phi(F)}{\partial\sigma_{ij}}L^{e}_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}-\frac{\partial\Phi(F)}{\partial V^{p}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{pp}}\right\}\right]=1+\xi \tag{9}$$

$$\overset{*}{t}_{ij}=\left[L^{e}_{ijkl}-L^{e}_{ijmn}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}\frac{\theta\Delta t}{1+\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{pq}}L^{e}_{pqkl}\right]D_{kl}-L^{e}_{ijmn}\frac{\Phi(F)_t}{1+\xi}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}} \tag{10}$$

(10)式において、[　]＝ L^{tan}_{ijkl} とおくと、最終的に正規圧密粘土の有限変形弾粘塑性構成式として次式を得る。

$$\overset{*}{t}_{ij}=L^{tan}_{ijkl}D_{kl}-L^{e}_{ijmn}\frac{\Phi(F)_t}{1+\xi}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}$$

次に過圧密粘土の有限変形弾粘塑性構成式の誘導を行う。

過圧密粘土の場合、非関連流れ則に基づいた定式化を行っている、よって(2)式は次の(2)'となる。

$$D^{vp}_{ij}=\langle\Phi(F)\rangle\frac{\partial f_p}{\partial\sigma_{ij}} \tag{2'}$$

また硬化パラメータとして V^p に変り γ^p を用いる。ここで γ^p を以下のように定義する。

$$\gamma^p\equiv\sqrt{(e^{vp}_{ij}\cdot e^{vp}_{ij})}$$

ここで e^{vp}_{ij} は粘塑性偏差ひずみテンソルであり、塑性ストレッチングテンソルを用いて次のように定義される。　$\dot{e}^{vp}_{ij}=D^{vp}_{ij}-\delta_{ij}D^{vp}_{mm}$

以上より(3)式は、次の(3)'式となる。

$$\dot{\Phi}=\frac{\partial\Phi(F)}{\partial\sigma_{ij}}\overset{*}{t}_{ij}+\frac{\partial\Phi(F)}{\partial\gamma^p}\dot{\gamma}^p \tag{3'}$$

ゆえに、(9)式の置き換えは、次の(9)'式となる。

$$\left[1+(\theta\Delta t)\left\{\frac{\partial\Phi(F)}{\partial\sigma_{ij}}L^{e}_{ijkl}\frac{\partial f_p}{\partial\sigma_{kl}}-\frac{\partial\Phi(F)}{\partial\gamma^p}P\right\}\right]=1+\xi \quad \text{ここで、} \quad P=\left\{\frac{\partial f_p}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial f_p}{\partial\sigma_{ij}}+\left(\frac{\partial f_p}{\partial\sigma_{mm}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{9'}$$

以上の点を変更し正規圧密粘土の場合と同様に誘導していくと最終的に過圧密粘土の有限変形弾粘塑性構成式として、次式を得る。

$$\overset{*}{t}_{ij}=L^{tan}_{ijkl}D_{kl}-L^{e}_{ijmn}\frac{\Phi(F)_t}{1+\xi}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}$$

3.有限要素法を用いた平面ひずみ圧縮試験. Shimple shear 試験

先に誘導した正規圧密、過圧密粘土の構成式を、変位に関しては8節点で、間隙水圧に関しては4節点で代表させた有限要素法により離散化し、有限変形プログラムを作成した。
そしてこのプログラムを用いて1要素の土供試体について、平面ひずみ圧縮試験及び、Simple shear 試験を行った。なおこれらの解析結果については、当日発表予定である。

【参考文献】

1) Adachi, T. and Oka, F. (1982), Constitutive equations for normally consolidated clay based on elasto-viscoplasticity, Soils and Foundations, Vol.22, No.4, pp.57-70.

2) Oka, F. and Washizu, H. (1981), Constitutive equation for sands and overconsolidated clays under dynamic loads based on elasto-plasticity, Proc. Inf. Conf. on Recent Advences in geotechnical Earthquake Engeering and Soil Dynamics, St. Louis, Vol. 1, pp. 111-122.

3) A TANGENT MODULUS METHOD FOR RATE DEPENDENT SOLIDS
; D.Peirce,C.F.Shin and A. Needleman ; Computer & Structures Vol. 18, No. 5, pp. 875-887, 1984