軸対称条件下におけるせん断帯生成条件について

金沢大学工学部　正員 ○ 飯塚　敦
金沢大学工学部　正員　太田　秀樹
Univ. of Colorado　R.Y.S. Pak

1．はじめに

円柱形に切り出した粘土の供試体を軸方向に圧縮せん断すると、ピークを持つ軸ひずみ（非排水条件、つまり非圧縮条件を仮定できれば、せん断ひずみを用いて表示できる）と軸応力（側圧はゼロであるから、主応力差でも表示できる）の関係が得られる。この応力とひずみの関係から、その軸差応力のピークの値をとって**強度**（非排水一軸強度の２倍）と称し、材料固有な値として用いられている。このような議論は、通常、微小変形理論の枠組みのなかで行われており、供試体の変形が均質（homogeneous）に保たれていれば、それなりの説得力がある。しかし多くの場合、実際は、供試体はバルジ型に変形し、耐荷力を失う付近ではせん断歪の局所化が観察され、ピークに至る（図-1）。すなわち、強度は材料固有の物質定数というよりも境界値問題の解と考えた方が自然であろう。

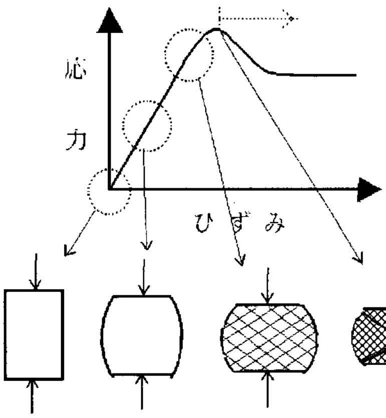

図-1　一軸圧縮供試体の変形と破壊

また近年、せん断帯の生成に関する研究が盛んになってきた。供試体をせん断すると、せん断応力の高まりにつれて編目状のすべり線（面）群が生成・観察され、その後、破壊のメカニズムを決定付けるすべり線の発達を促す。この様なすべり線を一般には、せん断帯と呼んでいるようである（正確には、せん断帯とは変位の不連続面ではなく、速度勾配の不連続面を言う）。

理論的なアプローチの内、場の支配方程式を立て、適当な境界条件の下でせん断帯の発生条件を吟味するというのが代表的な方法である。この時、せん断帯の発生条件は、支配方程式の特性が双曲型（特別な場合は、放物型）に変化する条件と等価なことから、はじめ楕円、双曲そして放物型に遷移する様子を追跡するのが普通である。双曲型の支配方程式は、従来、極限解析で取り扱われており、せん断帯の生成を吟味するということは、材料の変形（楕円型）から破壊（双曲型）までを連続して捉える試みに他ならない。ここまでの議論を行うのに、微小変形理論によるか有限変形理論によるかは問われない。しかし、少し掘り下げて「せん断帯」の存在を考えるとき、有限変形理論しかもその増分理論によった方が、よりストレートなアプローチが可能となる。本質的には、破壊もしくはその近傍にまで至る変形はとても「微小」とは言えないとする立場をとることによるが、極論として、変形の初期から終局の破壊まで（globalに）解の一意性を保証することに対する疑問に端を発している。もしglobalな解の一意性を要求すれば、材料のひずみエネルギー関数は正定値でなければならない。例えば超弾性体の場合、ひずみポテンシャルは強い凸でなければならない。このような材料は、一般に客観性を満足しないようである。また解が一意である限り安定性条件は破られず、せん断帯は発生し得ない。現実にもglobalに解の一意性を満足できる材料を作り得ることはできず、globalな意味において解の一意性／安定性を議論する意味がうすい。変形から破壊までという長い道のりにおいて、解の分岐／安定・不安定の議論は、局所的（local）な意味においてこそ現実的であろう。

しかし、有限変形増分理論によるせん断帯の生成に関する議論も、そのほとんどが一様変形場からのせん断帯の生成を吟味しているのに留まっており、我々が実際に観察しているような、非一様変形が進んだ後からの議論はなされていない。著者らは、あくまで愚直に図－１に示されたプロセスを追ってゆこうと考えている。著者らのアプローチの理論的詳細は他の機会にゆずり、本稿では一軸円柱供試体を想定し、図-１（発生したすべり線は、もはや軸対称ではない）とは異なり、軸対称条件が保持されている下でのせん断帯の生成の可能性を議論する。軸対称条件下での速度場不連続面が存在するかどうかを検討することと理論的にはなんら変わるところはなく、存在できないことがHill(The mathematical theory of plasticity,1950)によって別の観点から証明されている。

2．局所的な安定性条件

まず一般論を述べる。増分有限変形理論の下で、境界値問題の解の安定性は次のように議論される。時刻t=0の基準配置から変形し、時刻$t=t_0$の現配置においてつりあいを保つ材料に死荷重(dead load)が作用しているとする。この現配置から任意の仮想変形過程(virtual displacement process)を考える。ただしその変形勾配は充分に小さいものとする。現配置における材料が安定であるためには、この過程によって材料内部に蓄えられる内的仕事から死荷重によってなされる外的仕事を差し引いたものが正なければならない。よって、途中、発散定理、線形化近似の助けを得て、$\int_V \dot{\mathbf{S}}\cdot\dot{\mathbf{F}}dV = \int_v \dot{\mathbf{S}}_t\cdot\mathbf{L}dv > 0$ を得る。ここに$\dot{\mathbf{S}}$、$\dot{\mathbf{S}}_t$、$\dot{\mathbf{F}}$、$\mathbf{L}$は各々第1Piola-Kirchhoff応力の速度テンソル、公称応力速度テンソル、変形勾配速度テンソル、変形速度勾配テンソルであり、dV、dvは各々基準配置、現配置における微小体積要素である。さらに構成不等式として安定条件を中心にまとめると、1) $\dot{\mathbf{S}}_t\cdot\mathbf{L}>0$ for any $\mathbf{L}\in$Lin, 増分解の一意性を保証、2) $\dot{\mathbf{S}}_t\cdot\mathbf{L}=0$ for some $\mathbf{L}\in$Lin, 安定限界、増分解の分岐発生、3) $\dot{\mathbf{S}}_t\cdot\mathbf{L}>0$ for any $\mathbf{L}\in$Rank 1, 強楕円条件、Accelaration Wave,物体波の正値性を保証、4) $\dot{\mathbf{S}}_t\cdot\mathbf{L}=0$ for some $\mathbf{L}\in$Rank 1, 増分釣合式の双曲型・放物型への移行、平衡不連続面の発生・伝播、せん断帯の生成、となる。ただしここで、積分記号は省略した。

3．軸対称条件とせん断帯の生成条件

円筒座標系（r，z，θ）を考える。$r\neq0$での速度勾配テンソルの成分は$L_{ij}=v_{i,j}$ (i, j= r，z)、$L_{\theta\theta}=v_r/r$、他はゼロである。非圧縮条件(tr$\mathbf{D}$=0)を課せば、$v_{r,r}+v_{z,z}+v_r/r=0$ である。ここにv_i,(i= r, z, θ)は変形速度ベクトルの成分である。

せん断帯の発生条件は4)で与えられるが、そのとき変形速度勾配テンソル$\mathbf{L}$のランクは1でなければならない。つまり、2つのベクトル $\mathbf{a}^T=(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}^T=(b_1, b_2, b_3)$ でもって$\mathbf{L}$は $\mathbf{L}=\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ と書き表わされねばならない。よって、非圧縮軸対称条件下での$\mathbf{L}$の成分と比較すると、まず $a_1b_3=a_2b_3=a_3b_1=a_3b_2=0$ を得る。これは以下の条件と等値である。i) $a_1=a_2=b_1=b_2=0$: $\mathbf{L}=\mathbf{0}$となり意味がない。ii) $a_1=a_2=a_3=0$ または $b_1=b_2=b_3=0$: $\mathbf{L}=\mathbf{0}$となり意味がない。iii) $a_3=b_3=0$: $\mathbf{a}^T=(0, 1, 0)$ および $\mathbf{b}^T=(1, 0, 0)$を得る。ただし$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$には単位ベクトルを選んだ。ところで$\mathbf{L}$が $\mathbf{L}=\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ と表わされる時、ベクトル$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$は各々単純せん断モードにおけるせん断方向ベクトルおよび固定面の法線方向ベクトルを意味する。ここでは非圧縮条件を仮定しているので、その結果、ベクトル$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$とは互いに直交する。またせん断帯の生成に関しては、$\mathbf{a}$がせん断帯の進展方向、$\mathbf{b}$がせん断帯の法線方向を表わしている。よって、ここで調べた軸対称の場合、そのせん断帯の生成は中心軸（z）に平行にしか発生し得ないことになる。ここまでの議論では構成式を用いていない。すなわち、上記議論は材料特性の如何にかかわらず成り立つ。

せん断帯の生成方向は、増分つりあい式に構成式を加えて境界値問題として解かれる。均質一様場に突如としてせん断帯が生成するものと考える場合が多い。解として得られるせん断帯の生成方向は、例えば主応力空間での最大主応力面とせん断帯の法線ベクトルとの成す角で表わされ、構成式の選択、つまり材料特性の違いによって異なるものとなる。そのため、応力状態の如何に関わらず、座標軸（円筒座標系）によってあらかじめせん断帯の生成方向が決められていては、物質点をつらねて連続したせん断帯が存在し得る可能性はほぼない。よって軸対称条件の下では、一般にせん断帯は生成し得ないといえる。

4．おわりに

実際には図-1に模したように、軸対称一軸圧縮円柱供試体といえどもすべり線網の発達をみて、最後に供試体の破壊を支配するすべり線が発生する。しかしこれらのすべり線はもはや軸対称とはなっておらず、純粋な3次元空間でその位置を占めている。よって上記の議論がすぐさま実際の一軸圧縮供試体の場合に当てはまるわけではないことに注意しなければならない。言い替えれば、軸対称一軸圧縮円柱供試体といえども、軸対称条件下だけでのせん断帯生成を吟味するだけでは不十分であって、今後、純粋に3次元的な取り扱いが必要となろう。

一軸円筒供試体を圧縮せん断してゆくと、多くの場合、端面摩擦等の影響によりバルジ型に非一様変形する（通常、このように考えられているが、バルジ型変形に至るのに端面での摩擦力が必ずしも必要なわけではない）。このバルジ型の変形モードは分岐解の内の一つである。変形が進む結果、破壊に至るわけであるから、せん断帯生成以前に生じる解の分岐と各変形モードを調べるのも重要である。実際には、変形はその変形に費やされるエネルギーがより小さい方へ進むであろうから、分岐解の各変形モードに費やされるエネルギーを比較することによって、翻って構成モデルの選定・淘汰の検討にも進んでゆくであろう。