

k-ε 乱流モデルによる 開水路流れの三次元数値解析法

信州大学工学部 ○学生員 田中 康雄

正 員 富所 五郎

1. はじめに

実在の河川等の解析を行うには、三次元的な解析が必要となる。そこで、空間変数に対して水平方向の三角形一次要素と、鉛直方向の余弦関数の積で表される形状関数による Galerkin 有限要素法に、k-ε 乱流モデルを適用する三次元数値解析法を考える。本論文では、y 方向の流速を零とおき、水平-鉛直の二次元解析を考え、非定常解析の収束計算の結果と、粗面对数則による流速分布との比較を行う。

2. 方程式

k-ε 乱流モデルで用いる方程式は以下のものである。^{1), 2)}

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\xi} u \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\xi} v \cdot dz = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L \cdot u + w(z) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = g \cdot I_x - g \frac{\partial \xi}{\partial x} + D \cdot u \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + L \cdot v + w(z) \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = g \cdot I_y - g \frac{\partial \xi}{\partial y} + D \cdot v \quad (3)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + L \cdot k + w(z) \cdot \frac{\partial k}{\partial z} = E \cdot k + A_v \cdot H - \epsilon \quad (4)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + L \cdot \epsilon + w(z) \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = E \cdot \epsilon + C_1 C_k k \cdot H - A \quad (5)$$

$$w(z) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u \cdot dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v \cdot dz \quad (6)$$

ただし、

$$A_v = C_\mu \cdot \frac{k^2}{\epsilon}, \quad A = C_2 \cdot \frac{\epsilon^2}{k}, \quad L = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad H = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2$$

$$D = \frac{\partial}{\partial x} \left(A_h \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_h \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

ここに、ξ は水面上昇量、u, v, w は x, y, z 軸方向の流速成分、g は重力加速度、A_h, A_v は水平、鉛直渦動粘性係数、I_x, I_y はそれぞれ x, y 方向の平均勾配で、E は D の A_v を A_v/σ に代えた式である。また、k, ε 方程式中の係数については標準値を用いる。座標軸については、図-1に示す。

3. 方程式の離散化¹⁾

空間変数に対して離散化を行うために、次のような近似関数を考える。

$$\left. \begin{aligned} u &= N_i \cos B_p (z - \xi) u_{pi} \\ \xi &= N_i \xi_i \end{aligned} \right\} B_p = \frac{p-1}{\xi+h} \pi \quad \begin{aligned} &(p=1, 2, \dots, m) \\ &(i=i, j, k) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、N_i = N_i(x, y) は三角形一次要素の形状関数、m は展開項数である。また、u, k, ε, A_v や z 方向に変化する物理量についても u と同様の近似を行う。また、時間変数については、陽的時間積分法の一つである two-step Lax-Wendroff法を用いて離散化を行う。

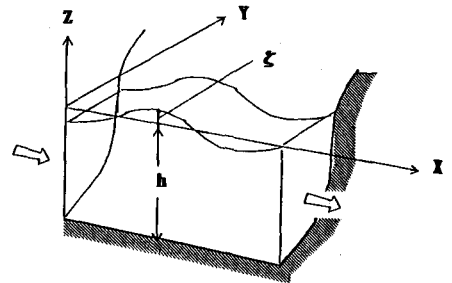


図-1 座標の定義

4. 初期条件及び、計算結果

解析に用いた開水路モデルは x 方向に 184m、 y 方向に 20m、水深 $h=0.1\text{m}$ 、 $I_x=0.01$ の長方形開水路である。初期値として、 u については粗面对数則、 k 、 ε については半理論式³⁾による値を与える。 A_n については要素内で一定値 ($0.12\text{m}^2/\text{s}$) とし、 A_0 については $f=-z/h+0.5$ ($0.0 \leq z/h \leq 0.5$) を与え、水面で減衰させる。展開項数は、 $m=11$ とした。また、実際に解析を行う水深は 0.095m とした。

図-2、3に示すように k と ε の分布は $-z/h=0.5$ 以下で半理論曲線とは異なる分布を示す。 ε の分布で、 $-z/h=0.0 \sim 0.5$ の範囲においてギブス現象が生じ値が波打っているが、全体として分布を良く表している。 k のグラフでは、変化が急激ではないため、先の現象は目立たない。図-4の A_n の分布は A_0 が k 、 ε から計算される事からギブス現象がさらに激しく見れるものの、ほぼ納得のいく分布をなしている。図-5の流速については、 $-z/h=0.95$ における値だけが大きになっているものの、全体として一致している。

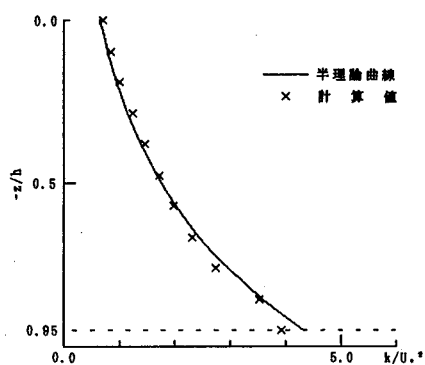


図-2 乱れエネルギーの分布

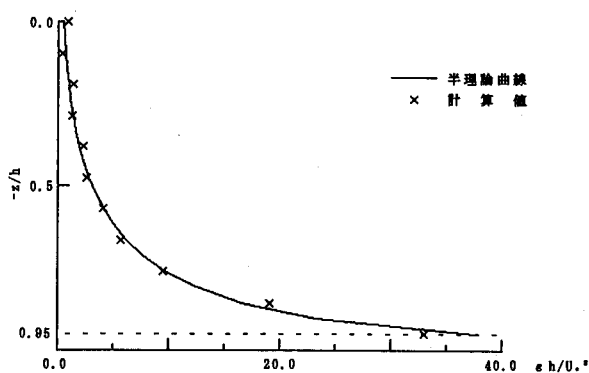


図-3 乱れ散逸率の分布

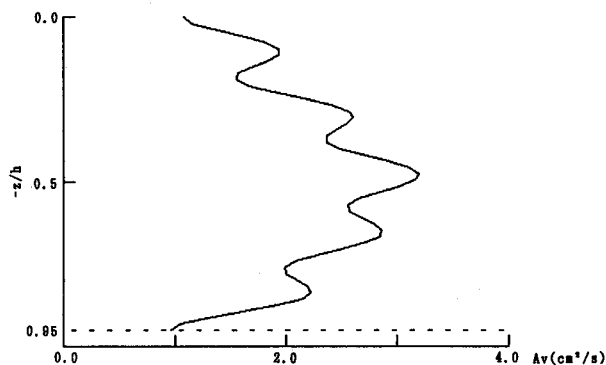


図-4 鉛直渦動粘性係数の分布

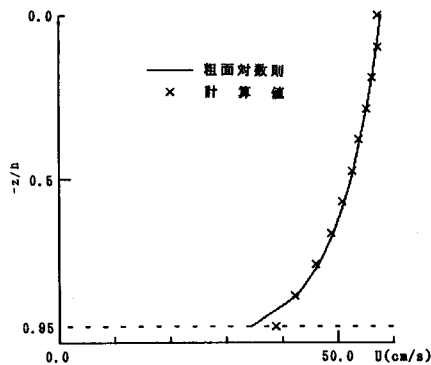


図-5 流速分布

5. おわりに

以上の結果より、 $k-\varepsilon$ 乱流モデルを本方法に適用する事に問題はないと思われる。今後は、一般の河川等の解析に用いてみるとともに、植生のある流れ場にも適用する事を考えてみたい。

【参考文献】

- 1) 富所, 荒木, 吉田: 開水路の流れの三次元数値解析法, 第29回水理講演回論文集, pp. 727~732, 1985
- 2) 土木学会編: 土木工学ハンドブック I, 技報堂出版, pp. 652, 1990
- 3) 前出2), pp. 497~503