部分重複波の5次近似解

名古屋大学工学部 正会員 岩田好一朗，名古屋大学大学院 学生員 ○ 富田孝史，宮田徹信

1．はじめに： 最近，沿岸海域の多目的・総合的利用を目的として，新形式の海岸・港湾構造物が砕波帯以深に建設されるようになってきた．これらの構造物は，一般には消波構造物であるため，構造物前面の海域は部分重複波の波浪場になる．この海域を有効に利用するためには，海域における波高の空間的な変化だけでなく，海底地形変化や懸濁物質の移動などを精度よく予測する必要があり，部分重複波の運動学的及び力学的な特性に対する知見が必要である．そこで，本研究では，有限振幅性の部分重複波の基本的な特性を明らかにするために，一様水深域を対象にして，その5次近似解を誘導したので，ここに報告する．

2．部分重複波の5次理論：(1) 支配方程式： 非粘性・非圧縮性流体及び非回転運動を仮定すると，基礎方程式及び境界条件式は以下のようになる．

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \quad : \quad \text{(fundamental equation)} \tag{1}$$

$$\eta_t + \eta_x\phi_x - \phi_z = 0 \quad : \quad z = \eta \quad \text{(kinematic free surface boundary condition)} \tag{2}$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\eta = R \quad : \quad z = \eta \quad \text{(dynamic free surface boundary condition)} \tag{3}$$

$$\phi_z = 0 \quad : \quad z = -h \quad \text{(bottom boundary condition)} \tag{4}$$

ここに，ϕは速度ポテンシャル，ηは水面変動，hは静水深，Rはベルヌイ定数，gは重力加速度，xは反射源を基準に入射波の進行する向きの水平軸，zは静水面を基準に鉛直上向きの鉛直軸，tは時間である．

(2) 部分重複波の5次近似解： 自由表面境界条件(2)と(3)を，それぞれ$z = 0$においてTaylar展開したうえで，摂動法を使用して支配方程式を解くと，次に示すような解を得る．なお，本論では，ϕの表示式は，紙面の都合上省略する．

$$\begin{aligned}
k\eta \;=\;& \delta[\,\cos\theta_I + \lambda\cos\theta_R\,] + \delta^2[\,E_{20}\{\cos 2\theta_I + \lambda^2\cos 2\theta_R\} + \lambda E_{21}\cos(\theta_I - \theta_R)\,] \\
&+ \delta^3[\,E_{30}\{\cos 3\theta_I + \lambda^3\cos 3\theta_R\} \\
&+ E_{31}\{\lambda\cos(2\theta_I + \theta_R) + \lambda^2\cos(2\theta_R + \theta_I)\} + E_{32}\{\lambda\cos(2\theta_I - \theta_R) + \lambda^2\cos(2\theta_R - \theta_I)\}\,] \\
&+ \delta^4[E_{40}\{\cos 4\theta_I + \lambda^4\cos 4\theta_R\} + E_{41}\{\cos 2\theta_I + \lambda^4\cos 2\theta_R\} \\
&+ E_{42}\{\lambda\cos(3\theta_I + \theta_R) + \lambda^3\cos(3\theta_R + \theta_I)\} + E_{43}\{\lambda\cos(3\theta_I - \theta_R) + \lambda^3\cos(3\theta_R - \theta_I)\} \\
&+ E_{44}\{\lambda\cos(\theta_I - \theta_R) + \lambda^3\cos(\theta_R - \theta_I)\} + E_{45}\{\lambda^2\cos 2(\theta_I - \theta_R)\} + E_{46}\{\lambda^2\cos 2\theta_I + \lambda^2\cos 2\theta_R\}\,] \\
&+ \delta[\,E_{50}\{\cos 5\theta_I + \lambda^5\cos 5\theta_R\} + E_{51}\{\cos 3\theta_I + \lambda^5\cos 3\theta_R\} \\
&+ E_{52}\{\lambda\cos(4\theta_I + \theta_R) + \lambda^4\cos(4\theta_R + \theta_I)\} + E_{53}\{\lambda\cos(4\theta_I - \theta_R) + \lambda^4\cos(4\theta_R - \theta_I)\} \\
&+ E_{54}\{\lambda\cos(2\theta_I + \theta_R) + \lambda^4\cos(2\theta_R + \theta_I)\} + E_{55}\{\lambda\cos(2\theta_I - \theta_R) + \lambda^4\cos(2\theta_R - \theta_I)\} \\
&+ E_{56}\{\lambda^2\cos(3\theta_I + 2\theta_R) + \lambda^3\cos(3\theta_R + 2\theta_I)\} + E_{57}\{\lambda^2\cos(3\theta_I - 2\theta_R) + \lambda^3\cos(3\theta_R - 2\theta_I)\} \\
&+ E_{58}\{\lambda^2\cos(\theta_I + 2\theta_R) + \lambda^3\cos(\theta_R + 2\theta_I)\} + E_{59}\{\lambda^2\cos(\theta_I - 2\theta_R) + \lambda^3\cos(\theta_R - 2\theta_I)\} \\
&+ E_{5A}\{\lambda^2\cos 3\theta_I + \lambda^3\cos 3\theta_R\}\,]
\end{aligned} \tag{5}$$

ここに，$\delta = \epsilon Ak$，$\theta_I = kx - \sigma_I t$，$\theta_R = -kx - \sigma_R t$，であり，$\epsilon A$は入射波の基本周波成分の振幅，$\lambda$は1次の反射率，$k$は入射波の波数，$\sigma_I$と$\sigma_R$はそれぞれ入射波と反射波の角周波数である．以下に，表示式中の係数を示す．なお，$q = \coth kh$である．

$E_{20} = q(3q^2 - 1)/4$，　$E_{21} = (q + q^{-1})/2$

$E_{30} = 3(9q^6 - 3q^4 + 3q^2 - 1)/64$，　$E_{31} = -(3q^4 + 18q^2 - 5)/64$，　$E_{32} = 3(9q^4 + 27q^2 - 15 + q^{-2} + 2q^{-4})/64$

$E_{40} = (405q^{11} + 81q^9 + 522q^7 - 262q^5 + q^3 + 21q)/384(5q^2 + 1)$

$E_{41} = -(81q^9 + 162q^7 - 900q^5 + 406q^3 - 21q)/384$

$E_{42} = -(81q^9 + 1053q^7 - 351q^5 + 283q^3 + 6q)/384(3q^2 + 4)$
$E_{43} = (81q^{11} + 540q^9 - 909q^7 - 230q^5 + 791q^3 - 168q - 123q^{-1} + 18q^{-3})/96(3q^4 - 2q^2 - 1)$
$E_{44} = -(21q^5 - 60q^3 - 52q + 58q^{-1} + 22q^{-3} - 6q^{-5})/128$
$E_{45} = (18q^7 + 81q^5 + 66q^3 + 2q - 66q^{-1} + 21q^{-3} + 6q^{-5})/64$
$E_{46} = -(219q^5 - 25q^3 + 15q + 57q^{-1} + 6q^{-3})/128$
$E_{50} = (30375q^{16} + 44550q^{14} + 129330q^{12} - 2490q^{10} - 19480q^8 + 13090q^6 - 2850q^4 - 750q^2 + 225)$
$\quad /12288(5q^2 + 1)(5q^2 + 3)$
$E_{51} = -(3645q^{14} + 12879q^{12} - 54027q^{10} + 8487q^8 - 1953q^6 + 1413q^4 + 207q^2 - 27)/4096(5q^2 + 1)$
$E_{52} = (17010q^{20} + 10692q^{18} - 338796q^{16} - 208747q^{14} + 2233370q^{12} + 3197451q^{10} + 894624q^8 - 2795383q^6$
$\quad -3204240q^4 - 697913q^2 - 3588)/4096(q^2 + 1)(2q^2 + 9)(3q^2 + 4)(5q^2 + 1)$
$E_{53} = (36450q^{25} + 48235q^{23} - 6775650q^{21} - 37064880q^{19} + 103062540q^{17} + 129963740q^{15} - 475995895q^{13}$
$\quad -97757180q^{11} + 409514100q^9 + 101950805q^7 - 102205590q^5 - 36606990q^3 + 6203630q + 4455900q^{-1}$
$\quad -700575q^{-3} + 36090q^{-5})/12288(q^2 - 1)(3q^2 + 1)(2q^4 - 5q^2 - 5)(3q^6 + 19q^4 + 9q^2 + 1)$
$E_{54} = -(2430q^{14} + 7020q^{12} - 28956q^{10} - 54592q^8 + 99586q^6 + 101134q^4 - 74104q^2 - 57864 - 3312q^{-2})$
$\quad /12288(q^2 + 1)(3q^2 + 4)$
$E_{55} = -(2187q^{20} + 24300q^{18} + 154287q^{16} + 279564q^{14} - 1519574q^{12} - 958260q^{10} + 1300440q^8 + 1463012q^6$
$\quad -136431q^4 - 504652q^2 - 1190030 + 20952q^{-2} + 10410q^{-4} + 1161q^{-6} + 27q^{-8})$
$\quad /2048(q^2 - 1)(3q^2 + 1)(3q^6 + 19q^4 + 9q^2 + 1)$
$E_{56} = -(1458q^{14} + 19197q^{12} + 28519q^{10} - 5789q^8 + 8203q^6 - 4102q^4 - 52342q^2 - 23468)/36864(q^2 + 1)(3q^2 + 4)$
$E_{57} = 5(20412q^{22} + 163701q^{20} + 507939q^{18} + 1223786q^{16} + 1323768q^{14} - 1700238q^{12} - 4046823q^{10} - 1288210q^8$
$\quad +1763692q^6 + 1032420q^4 - 31072q^2 - 222476 - 123650q^{-2} - 33087q^{-4} - 3654q^{-6} - 108q^{-8})$
$\quad /12288q^2(q^2 - 1)(3q^2 + 1)(3q^2 + 5)(3q^6 + 19q^4 + 9q^2 + 1)$
$E_{58} = -(378q^8 + 3345q^6 - 3118q^4 - 3520q^2 - 2267 + 145q^{-2} - 802q^{-4} + 8q^{-6})/8192$
$E_{59} = (12150q^8 - 27495q^6 - 30657q^4 + 28713q^2 + 14739 - 2667q^{-2} - 2805q^{-4} - 1110q^{-6} + 216q^{-8})/8192$
$E_{5A} = (13122q^{24} - 75816q^{22} - 4390524q^{20} - 8325909q^{18} - 104877q^{16} - 2356287q^{14} - 10218025q^{12} + 7033959q^{10}$
$\quad +15467311q^8 + 4032379q^6 + 57041q^4 + 964130q^2 + 526744 + 82272q^{-2} + 3888q^{-4})$
$\quad /12288(q^2 - 1)(q^2 + 1)(3q^2 + 1)(3q^2 + 4)(3q^6 + 19q^4 + 9q^2 + 1)$

また，σ_Iとσ_Rは，

$$\sigma_I/\sigma_{00} = \sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{i} \epsilon^i \lambda^j \sigma_{Iij} \quad , \quad \sigma_R/\sigma_{00} = \sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{i} \epsilon^i \lambda^j \sigma_{Rij} \tag{6}$$

であり，各成分は以下の通りである．

$\sigma_{00} = \sqrt{g/k \cdot \tanh kh}$
$\sigma_{I00} = \sigma_{R00} = 1$
$\sigma_{I20} = \sigma_{R22} = (9q^4 - 10q^2 + 9)/16$
$\sigma_{I22} = \sigma_{R20} = -(q^2 + 6 + q^{-2})/8$
$\sigma_{I40} = \sigma_{R44} = (243q^{10} - 2457q^8 + 7578q^6 - 7374q^4 + 8211q^2 - 4473)/3072$
$\sigma_{I42} = \sigma_{R42} = -(579q^6 - 170q^4 - 154q^2 - 328 - 99q^{-2} - 142q^{-4} + 24q^{-6})/512$
$\sigma_{I44} = \sigma_{R40} = -(63q^9 - 198q^7 + 505q^5 + 1093q^3 - 609q + 230q^{-1} + 7q^{-3} - 12q^{-5})/512$

これ以外のσ_I，σ_Rの成分は０である．

3. おわりに：本論では，部分重複波の水面変動に対する５次近似解を示した．速度ポテンシャルに対する表示式は別の機会に発表することにし，今後，部分重複波の５次近似解の必要性や妥当性を水理実験から検証し，さらにその適用限界を明らかにしていく所存である．