

山地河川流路工の2次元流れ計算

岐阜大学工学部 正員 河村三郎

岐阜大学工学部 正員 中谷 剛

岐阜大学工学部 学生員 ○桜井友彰

岐阜大学工学部 学生員 前川裕樹

1. はじめに 本研究は、2次元浅水方程式を用いて、急流河川の流れの数値解析を行ったものである。急流河川での流れは常流と射流の混在する複雑な流れとなっている。そこで、跳水を伴うような水面形の計算にも適用が可能であるMacCormack法を用いることで計算を進めることとした。また境界条件の複雑に変化する湾曲水路などの計算においては、一般直交座標系への座標変換をおこなっての計算を進めることとした。ここでは、合流部、湾曲部の2種類のケースについて、数値解析をおこなった。

2. 差分式 基礎方程式は2次元浅水方程式を用い、連続式、X方向運動方程式、Y方向運動方程式からなる。

$$U_t + E_x + F_y = C + (\nu_T R_x)_x + (\nu_T R_y)_y$$

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} hu \\ u^2 h + g h^2 / 2 \\ uvh \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} hv \\ uvh \\ v^2 h + g h^2 / 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ g h i_x - n^2 g u \sqrt{u^2 + v^2} / h^{1/3} \\ g h i_y - n^2 g v \sqrt{u^2 + v^2} / h^{1/3} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ hu \\ hv \end{pmatrix}$$

文字の右下にある添え字は偏微分を表す。

h : 水深, u : X軸方向の流速, v : Y軸方向の流速, g : 重力加速度, n : 粗度係数

i_x : X軸方向の河床勾配, i_y : Y軸方向の河床勾配, ν_T : 渦動粘性係数

また、湾曲部の計算においては、一般直交座標系において計算を行った。2次元浅水方程式を一般直交座標系 ($\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$) へ座標変換を行ったものを次に示す¹⁾。

$$U_t^* + E_{\xi}^* + F_{\eta}^* = C^* + (\nu_T R_{\xi}^*)_{\xi} + S_{\eta}^* + (\nu_T T_{\eta}^*)_{\eta}$$

$$U^* = \begin{pmatrix} h/J \\ hu/J \\ hv/J \end{pmatrix}, \quad C^* = \begin{pmatrix} 0 \\ g h i_{\xi} - n^2 g u \sqrt{u^2 + v^2} / h^{1/3} / J \\ g h i_{\eta} - n^2 g v \sqrt{u^2 + v^2} / h^{1/3} / J \end{pmatrix}$$

$$E^* = \begin{pmatrix} (\xi_x hu + \xi_y hv) / J \\ (\xi_x (u^2 h + g h^2 / 2) + \xi_y uvh) / J + ((\nu_T \xi_x)_x hu + (\nu_T \xi_y)_y hu) / J \\ (\xi_x uvh + \xi_y (v^2 h + g h^2 / 2)) / J + ((\nu_T \xi_x)_x hv + (\nu_T \xi_y)_y hv) / J \end{pmatrix}$$

$$F^* = \begin{pmatrix} (\eta_x hu + \eta_y hv) / J \\ (\eta_x (u^2 h + g h^2 / 2) + \eta_y uvh) / J + ((\nu_T \eta_x)_x hu + (\nu_T \eta_y)_y hu) / J \\ (\eta_x uvh + \eta_y (v^2 h + g h^2 / 2)) / J + ((\nu_T \eta_x)_x hv + (\nu_T \eta_y)_y hv) / J \end{pmatrix}$$

$$R^* = \begin{pmatrix} 0 \\ (\xi_x^2 + \xi_y^2) hu / J \\ (\xi_x^2 + \xi_y^2) hv / J \end{pmatrix}, \quad S^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \nu_T (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) hu / J \\ 2 \nu_T (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) hv / J \end{pmatrix}$$

$$T^* = \begin{pmatrix} 0 \\ (\eta_x^2 + \eta_y^2) hu / J \\ (\eta_x^2 + \eta_y^2) hv / J \end{pmatrix}$$

$$\xi_x = y_\eta / J, \quad \eta_x = -y_\xi / J, \quad \xi_y = -x_\eta / J, \quad \eta_y = x_\xi / J, \quad J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

ここで、 S^* において $(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) = -(x_\xi x_\eta - y_\xi y_\eta) / J^2$ であり、もしも格子生成において境界上で格子が直交するようにすれば $x_\xi x_\eta - y_\xi y_\eta = 0$ であり $S^* = 0$ となる²⁾。

$$U_\xi^* + E_\xi^* + F_\eta^* = C_\xi^* + (\nu_\tau R_\xi^*)_\xi + (\nu_\tau T_\eta^*)_\eta$$

保存則形差分法には、MacCormack法を用いた。MacCormack法を用いる際に発生する不安定な数値振動を抑えるためにTVD形式のスキームを採用した³⁾。境界条件の決定には、BOX Methodを用いた⁴⁾。多次元問題では、スキームが複雑になり安定条件も厳しくなるので、時間分割法を用いて計算を行った。

$$U_\xi^* + E_\xi^* = C_\xi^* + (\nu_\tau R_\xi^*)_\xi$$

$$U_\eta^* + F_\eta^* = C_\eta^* + (\nu_\tau T_\eta^*)_\eta$$

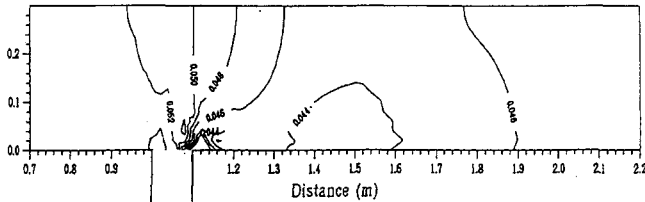
$$C_\xi^* = \begin{pmatrix} 0 \\ (g h i_\xi - n^2 g u \sqrt{u^2 + v^2} / h^{1/3}) / J \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_\eta^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (g h i_\eta - n^2 g v \sqrt{u^2 + v^2} / h^{1/3}) / J \end{pmatrix}$$

直角水路合流部における計算手順は次のようである。

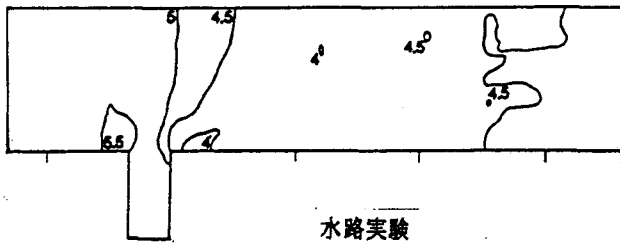
$$S = (L_x (\Delta t) L_y (\Delta t) + L_y (\Delta t) L_x (\Delta t)) / 2$$

ここで、 L_x 、 L_y は各々X、Y方向の差分演算子。時間刻み幅はX方向に $\Delta t / 2$ 、Y方向に Δt 直角水路合流部の流れを直線水路の途中から一様流が流入していると仮定して、計算を行った。

Water-Surface
Contour



数値計算



水路実験

計算条件

本川流量幅 (cm)	30
支川流量幅 (cm)	10
全流量 (l/sec)	5.0
支川流量 (l/sec)	1.5
マンニングの粗度係数	0.01
Δx (cm)	2.0
Δy (cm)	2.0
Δt (sec)	0.004

3. おわりに 直交座標系において、2次元浅水流方程式、MacCormack法等を用いて、合流部の計算は実験結果とよく合致し、その適応性が認められた。今後、それらを用いて一般直交座標系において湾曲部の計算を進めていく。

参考文献 1). C.A.J. Fletcher : Computational Techniques for Fluid Dynamics 2, pp.46-123 2). 大野 豊, 磯田和男: 新版 数値計算 ハンドブック, pp.289-293, pp.376-385 3). Harten, A.: High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, J. of Comp. Physics 49, pp.357-393, 1983. 4). Joel H. Ferziger : Numerical Methods for Engineering Application, pp.155-157