

散乱波の位相シフトと逆問題への応用

東海大学海洋学部 学生員 ○瀬戸 恭英
東海大学海洋学部 学生員 五月女晃久
東海大学海洋学部 正 員 北原 道弘

1. はじめに

構造部材内に存在する欠陥の形状や物性の変化を超音波を利用して非破壊的に評価しようとする場合、欠陥から散乱された遠方散乱場が有する基本的な情報として、波の振幅と位相が挙げられる。ここでは、遠方散乱波動場の位相に着目し、位相情報から欠陥の形状を推定する方法について考える。以下、散乱場の位相を決定する積分表現を示し、この積分表現から得た位相をもとに、ニュートン法に基づく散乱体形状の一推定法とその結果について示す。

2. 散乱問題

波動場 u (スカラー量) に対する散乱問題を考える。波動場 u は次のヘルムホルツ方程式に支配される。

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{in } D \quad (1)$$

ここに、 $k = \omega/c$ は波数、 ω は角振動数、 c は波の速度である。全波動場 u を次のように、入射波 u^I と散乱波 u^S に分離する。

$$u = u^I + u^S \quad (2)$$

このとき、波動 u に対する積分表現は、次のように書ける。

$$u(\mathbf{x}) = \int_S U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} dS_y - \int_S \frac{\partial U(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} u(\mathbf{y}) dS_y + u^I(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D \quad (3)$$

ここで、 U は基本解であり、3次元 Helmholtz 方程式 (1) に対しては、次のように与えられる。

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (4)$$

ここに、 r は外部領域 D 内の観測点 $\mathbf{x}$ と散乱体表面 S 上のソース点 $\mathbf{y}$ の距離 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ である。

3. 位相シフトの積分表現

入射波を x_3 軸方向に進む単位振幅の平面波とすると、この入射波 u^I は遠方において次のように書ける。

$$u^I(\mathbf{x}) = e^{ikx_3} \sim \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{kx} e^{i\pi/2} \sin\left(kx - \frac{l\pi}{2}\right) P_l(\cos\theta) \quad (5)$$

また、全波動場 u は遠方において次のように表現できる。

$$u(\mathbf{x}) \sim \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{kx} e^{i\delta_l} e^{i\pi/2} \sin\left(kx - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) P_l(\cos\theta) \quad (6)$$

上式 (6) に表れる未知量 δ_l が、入射波 u^I に対する全波動場 u の位相シフト量である。この位相シフト δ_l に対する積分表現は、全波動場 u の2つの表現 (3) と (6) を関係付けることにより、次のように得られる¹⁾。

$$e^{2i\delta_l} - 1 = -(-i)^{l+1} \frac{k}{2\pi} \int_S \left\{ \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} + ik\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \right\} \times j_l(ky) P_l(\cos\theta) dS_y, \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

上式中の散乱体表面 S に関する幾何学量 $\mathbf{n}(\mathbf{y})$, $\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{y})$, y , θ などは Fig.1 に定義されている。式 (7) より、位相シフト δ_l は、散乱体形状 S 、曲面の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ 、ソース点 $\mathbf{y}$ から観測点 $\mathbf{x}$ に向く単位ベクトル $\hat{\mathbf{r}}$ 、散乱体表面上の物理量 u と $\partial u/\partial n$ 、入射波の波数 k に関係して決まることがわかる。

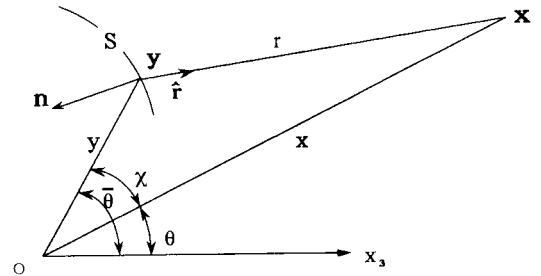


Fig.1 Geometrical relation

4. 位相シフトの形状推定問題への応用

遠方波動場の入射波に対する位相シフト δ_l ($l = 0, 1, 2, \dots$) が計測できたとして、散乱体の形状 S を決める一手法について考える。

境界条件は散乱体の表面上で既知であり、 $u = 0$ とする。このとき、位相シフト δ_l に対する積分表現 (7) と境界上の未知量 $\partial u/\partial n$ を決めるための積分方程式は次のようになる。

$$e^{2i\delta_l} - 1 = -(-i)^{l+1} \frac{k}{2\pi} \int_S \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} j_l(ky) P_l(\cos\theta) dS_y, \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

$$\int_S \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y = -u^I(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S \quad (9)$$

いま、入射波 u^I (よって、入射波の波数 k) と遠方で観測された各部分波の位相シフト δ_l ($l = 0, 1, 2, \dots$) が与えられたとき、式 (8) と (9) は散乱体形状 S と境界上の未知量 $\partial u/\partial n$ を決めるための連立方程式系と見ることができ。

一般に、散乱体形状 S は無限の自由度を有している。式 (8) も各 δ_l ($l = 0, 1, 2, \dots$) について、無限個存在し、原理的には、形状 S を表現する無限限のパラメータを決定することができる。実際には、形状 S は有限個のパラメータ β_j ($j = 1, 2, \dots, n$) で表現されるのが普通であろう。このとき β_j を決定するために、式 (8) より δ_l ($l = 0, 1, 2, \dots, n-1$) に対応する n 個の方程式を選ぶことができる。また、 n 個の異なる波数 (k_j , $j = 1, 2, \dots, n$) に対する第 0 次の位相シフト $\delta_0(k_j)$ に対応する n 個の方程式

$$e^{2i\delta_0(k_j)} - 1 = -(-i)^{l+1} \frac{k_j}{2\pi} \int_S \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} j_l(k_j y) P_l(\cos \bar{\theta}) dS_y, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

を選ぶことも出来る。ただし、この場合には、境界上の未知量 $\partial u / \partial n$ を決めるための積分方程式 (9) も、 n 個の異なる入射波の波数 (k_j , $j = 1, 2, \dots, n$) に対して解くものとする。

いま、散乱体形状として x_3 軸に関して回転対称な回転楕円面を考える。

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{b}\right)^2 = 1 \quad (11)$$

ここに、 a, b は回転楕円面の主軸の長さである。回転楕円面を表す 2 つのパラメータ a, b を決めるために、ここではニュートン法を採用することとし、パラメータ a, b に関する 2 つの非線形方程式を考える。

$$\begin{aligned} F_1(a, b) &= 0 \\ F_2(a, b) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

微小パラメータ増分 $\Delta a, \Delta b$ に対し、

$$\begin{aligned} F_1(a + \Delta a, b + \Delta b) &= 0 \\ F_2(a + \Delta a, b + \Delta b) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

を仮定すると、修正量 $\Delta a, \Delta b$ を決めるための方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial F_1}{\partial b} \Delta b &= -F_1(a, b) \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial F_2}{\partial b} \Delta b &= -F_2(a, b) \end{aligned} \quad (14)$$

これより、 $\Delta a, \Delta b$ に対する次の表現を得る。

$$\begin{Bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_1(a, b) \\ F_2(a, b) \end{Bmatrix} \quad (15)$$

2 つのパラメータ a, b を決めるための 2 つの方程式 (12) として、ここでは、2 つの波数 k_1, k_2 に対する第 0 次の位相シフト $\delta_0(k_1), \delta_0(k_2)$ の積分表現式 (10) を選ぶ。対応する境界上の未知量 $\partial u / \partial n$ を決めるための積分方程式 (9) と共に、逆解析に必要な方程式系は次のようになる。

$$F_1(a, b) = \frac{-(-i)k_1}{2\pi} \int_{S(a,b)} \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} j_0(k_1 y) P_0(\cos \bar{\theta}) dS_y - [e^{2i\delta_0(k_1)} - 1] \quad (16a)$$

$$F_2(a, b) = \frac{-(-i)k_2}{2\pi} \int_{S(a,b)} \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} j_0(k_2 y) P_0(\cos \bar{\theta}) dS_y - [e^{2i\delta_0(k_2)} - 1] \quad (16b)$$

$$\int_{S(a,b)} \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y = -u^I(\mathbf{x}) \quad (17a, b)$$

for $k = k_1$ and k_2 .

仮定した a, b に対し、入射波の波数 $k = k_1$ ($k = k_2$) について、式 (17a) (式 (17b)) により $S(a, b)$ 上の未知量 $\partial u / \partial n$ を求め、式 (16a) (式 (16b)) の右辺に代入する。式 (15) により修正量 $\Delta a, \Delta b$ を計算し、修正量が許容値に収まるまで繰り返す。問題は、式 (15) におけるパラメータ a, b による微分の評価である。関数 F_1 と F_2 は、一般に形状パラメータに関し非線形となるため、ここでは、微分を、定義に従い数値的に評価する。例えば、 $\partial F_1(a, b) / \partial a$ の (a^0, b^0) における値は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(a^0, b^0)}{\partial a^0} &= \frac{-(-i)k_1}{2\pi} \left[\int_{S(a^0 + \Delta a, b^0)} \frac{\partial u}{\partial n} j_0(k_1 y) P_0(\cos \bar{\theta}) dS_y \right. \\ &\quad \left. - \int_{S(a^0, b^0)} \frac{\partial u}{\partial n} j_0(k_1 y) P_0(\cos \bar{\theta}) dS_y \right] / \Delta a \end{aligned} \quad (18)$$

ここに、 Δa は数値微分のための微小パラメータであり、右辺第 1, 第 2 項の表面 $S(a^0 + \Delta a, b^0)$ 及び $S(a^0, b^0)$ 上の未知量 $\partial u / \partial n$ は、波数 k_1 に対する境界積分方程式

$$\begin{aligned} \int_{S(a^0 + \Delta a, b^0)} \frac{\partial u}{\partial n} U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y &= -u^I(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S(a^0 + \Delta a, b^0) \\ \int_{S(a^0, b^0)} \frac{\partial u}{\partial n} U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y &= -u^I(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S(a^0, b^0) \end{aligned} \quad (19)$$

を解いて評価する。

Fig.2 に回転楕円面 ($a = 1, b = 0.5$) に対する上記反復過程の収束状況を示す。この図において、2 つのパラメータの初期値は、 $a^0 = b^0 = 2.5$ と選び、式 (16a, b) における第 0 次の位相シフト量 $\delta_0(k_1)$ と $\delta_0(k_2)$ は、 $ak_1 = 0.1$ と $ak_2 = 0.5$ に対応する δ_0 の値を用いた。図より、第 6 回目の反復で、回転楕円面に収束していることがわかる。

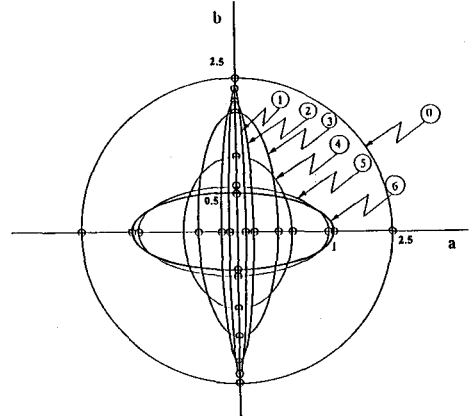


Fig.2 Convergence process for rotational ellipsoid with $a = 1, b = 0.5$ (Initial parameters : $a^0 = b^0 = 2.5$)

参考文献

- 1) 五月女, 飯田, 北原: 散乱波動の一位相解析手法, 平成 2 年度土木学会中部支部研究発表会概要集, pp.6-7, 1991