

インクルージョンによる遠方散乱断面積の計算法について

東海大学海洋学部 学生員 ○加藤 昇治
東海大学海洋学部 正 員 北原 道弘

1. はじめに

構造部材内に存在する欠陥を、超音波を利用して非破壊的に検出・評価しようとする場合、欠陥により散乱された遠方弾性散乱場を吟味する必要がある。このとき、着目すべき物理量は、変位や応力など通常の構造解析で重要となる物理量ではなく、波動の放射パターンを示す散乱振幅、散乱波動の放射エネルギーに関する散乱断面積、あるいは波動の位相の進み・遅れを意味する位相シフトである場合が多い。ここでは、3次元弾性波動問題における散乱振幅を散乱断面積に関係付け、弾性散乱断面積の計算法を示し、一解析例について述べる。

2. 弾性散乱断面積

波動の伝播方向 $\hat{\mathbf{x}}$ に垂直な単位面積、単位時間当たりのエネルギー伝達率をインテンシティと呼べば、これは次のように書ける。

$$I = I_i \hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_i \sigma_{ij} \dot{u}_j \quad (1)$$

ここに、 σ_{ij} は応力、 $\dot{u}_j$ は変位の時間微分である。このとき、表面 A を通過する単位時間当たりのエネルギー伝達率、即ち、パワーは次のようになる。

$$P = \int_A I dA = \int_A \hat{\mathbf{x}}_i \sigma_{ij} \dot{u}_j dA \quad (2)$$

いま、散乱全断面積 $P(\omega)$ を、入射波の平均インテンシティ $\langle I^I \rangle$ に対する全方向に散乱された散乱波の平均パワー $\langle P^S \rangle$ の比として、次のように定義する。

$$P(\omega) = \frac{\langle P^S \rangle}{\langle I^I \rangle} \quad (3)$$

ここに、 ω は角振動数であり、 $\langle \cdot \rangle$ は次のような時間平均を表す。

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (T: \text{period}) \quad (4)$$

散乱エネルギーの方位依存性を表す物理量が散乱微分断面積 $dP(\omega)/d\Omega$ (Ω は立体角) であり、これは、散乱体から見て遠方において次のように書ける。

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{x^2 \hat{\mathbf{x}}_i \sigma_{ij}^S \dot{u}_j^S}{\langle I^I \rangle} \quad (5)$$

上式において、遠方の位置ベクトル $\mathbf{x}$ の方向を向く単位ベクトルが $\hat{\mathbf{x}}$ であり、 $x = \sqrt{x_i x_i}$ 、 $dA = x^2 d\Omega$ なる関係を用いた。

式(5)及び式(3)を用いて、散乱微分断面積 $dP(\omega)/d\Omega$ 及び散乱全断面積 $P(\omega)$ を決めるためには、遠方場における散乱波の変位成分 u_j^S と散乱波の応力成分 σ_{ij}^S を求

める必要がある。このために、散乱場の積分表現を利用する。

3. 散乱場の積分表現

全変位場 u を入射波 u^I と散乱波 u^S の和として

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i^I(\mathbf{x}) + u_i^S(\mathbf{x}) \quad (6)$$

と書けば、散乱波 u^S の積分表現は次のようになる。

$$u_i^S(\mathbf{x}) = \int_S U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{y}) dS_y - \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) dS_y \quad (7)$$

ここに、 S は散乱体の表面である。また、散乱波による応力は次のように計算できる。

$$\sigma_{ij}^S(\mathbf{x}) = \lambda u_{k,k}^S \delta_{ij} + \mu (u_{i,j}^S + u_{j,i}^S) \quad (8)$$

4. 基本解の遠方表現

式(7)における基本解 $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は、3次元問題の場合、次のようになる。

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{e^{ik_T r}}{r} \delta_{ij} + \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{e^{ik_T r}}{r} - \frac{e^{ik_L r}}{r} \right\} \right] \quad (9)$$

ここに、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ であり、2重層核 $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ の表現は

$$T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\{\lambda U_{i,m} \delta_{jk} + \mu U_{ij,k} + \mu U_{ik,j}\} n_k(\mathbf{y}) \quad (10)$$

となる。また、式(9)において、 k_L は縦波の波数、 k_T は横波の波数である。

いま、次のように遠方近似を導入する。

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \sim x - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}, \quad (x \rightarrow \infty) \quad (11a)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/x \text{ and } x = |\mathbf{x}| = (x_i x_i)^{1/2} \quad (11b)$$

このとき、基本解の主要項 $\exp(ik_\alpha r)/r$ は遠方において次のように書ける。

$$\frac{e^{ik_\alpha r}}{r} \sim \frac{e^{ik_\alpha x}}{x} e^{-ik_\alpha \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}}, \quad (\alpha = L, T) \quad (12)$$

5. 散乱場の遠方表現

基本解の主要項の遠方表現 (12) を基本解 (9), (10) に適用し, これを散乱波の積分表現 (7) に代入すれば, 散乱波 u^S の遠方表現を得る.

$$u_i^S(\mathbf{x}) \sim u_i^{SL} + u_i^{ST} \\ = A_i(\mathbf{x}, k_L) \frac{e^{ik_L x}}{x} + B_i(\mathbf{x}, k_T) \frac{e^{ik_T x}}{x} \quad (13)$$

ここに, $\mathbf{A}$ は縦波の, $\mathbf{B}$ は横波の散乱振幅 (ベクトル量) であり, それぞれ次のように書ける.

$$A_i(\mathbf{x}, k_L) = \hat{x}_i \hat{x}_j f_j(\mathbf{x}, k_L) \quad (14a)$$

$$B_i(\mathbf{x}, k_T) = (\delta_{ij} - \hat{x}_i \hat{x}_j) f_j(\mathbf{x}, k_T) \quad (14b)$$

上式中のベクトル $\mathbf{f}$ は, 散乱体の形状, 散乱体表面上の変位・応力ベクトル, また伝播母材内の物性に関する量であり, 次のようになる.

$$f_j(\mathbf{x}, k_\alpha) = \frac{1}{4\pi\rho c_\alpha^2} \int_S [ik_\alpha \lambda \hat{x}_j u_k(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) \\ + ik_\alpha \mu \{u_j(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) + u_k(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y})\} \hat{x}_k \\ + t_j(\mathbf{y})] e^{-ik_\alpha \hat{x} \cdot \mathbf{y}} dS_y, \quad (\alpha = L, T) \quad (15)$$

式 (13) を場の点 $\mathbf{x}$ について微分することにより, 散乱波による応力成分 σ_{ij}^S を得る.

6. 散乱微分断面積と散乱全断面積

入射波を x_3 軸方向に伝播する平面縦 (L) 波とする.

$$u^I = e_3 \exp[i(k_L x_3 - \omega t)] \quad (16)$$

このとき, 弾性散乱微分断面積の表現は, 定義式 (5) に遠方散乱場の表現式 (13) を用いて, 最終的に次のようになる.

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = |\mathbf{A}|^2 + \frac{k_L}{k_T} |\mathbf{B}|^2 \quad (17)$$

ここに, 縦波と横波の散乱振幅 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は式 (14) と (15) に定義されている. いま, 縦波による散乱微分断面積を

$$\frac{dP_L(\omega)}{d\Omega} = |\mathbf{A}|^2 \quad (18a)$$

横波による散乱微分断面積を

$$\frac{dP_T(\omega)}{d\Omega} = |\mathbf{B}|^2 \quad (18b)$$

とするとき, 散乱微分断面積は縦波と横波による成分の単純和でないことに注意する.

$$\frac{dP}{d\Omega} \neq \frac{dP_L}{d\Omega} + \frac{dP_T}{d\Omega} \quad (19)$$

式 (17) に見るように, ポアソン比の効果 k_L/k_T がエネルギー関係に入ってくる.

弾性散乱全断面積 $P(\omega)$ を得るには, 微分断面積の表現 (17) を全立体角 Ω について積分すればよく, 結果は非常にシンプルな表現

$$P(\omega) = \frac{4\pi}{k_L} I_m \bar{A}_3(0) \quad (20)$$

となる. ここに, 前方平均散乱振幅 $\bar{A}_3(0)$ は次のように定義されている.

$$\bar{A}_3(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_3(\theta = 0, \phi) d\phi \quad (21)$$

7. 計算結果

Fig.1 に解析対象とした散乱モデルを示す. 入射波は x_3 軸方向に進む平面波であり, 半径 a の 2 つの球形散乱体が x_1 軸上にその中心を有するように位置している. 球形散乱体の中心間の長さ D は $D = 2.2a$ である.

Fig.2 に散乱体が 2 つの球形インクルージョンである場合の, 縦波による散乱微分断面積 $dP_L/d\Omega$, 横波による散乱微分断面積 $dP_T/d\Omega$, 散乱微分断面積 $dP/d\Omega$ を示す. この結果は, $x_3 - x_1$ 面内の微分断面積を x_3 軸から計った角度に対して円形グラフ上に図示したものである.

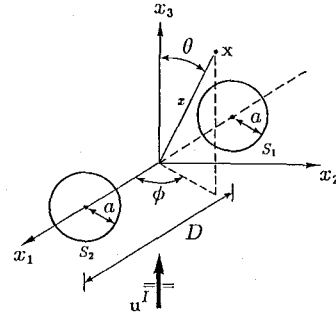


Fig.1 Scattering model

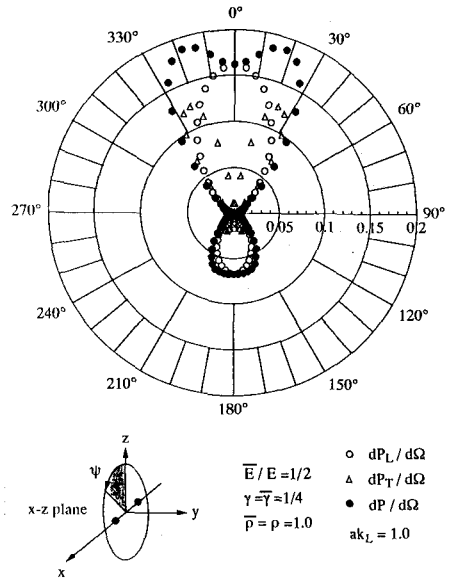


Fig.2 Differential cross sections for inclusions (z-x plane)