

充実断面空間曲線棒材の有限変位解析法

榑横河ブリッジ 正員 ○春日井俊博
名古屋工業大学 正員 後藤 芳顕
名古屋工業大学 正員 松浦 聖

1. まえがき：著者らは充実断面空間曲線棒材を対象として、棒理論の仮定以外何の近似も導入しない有限変位理論の定式化を行い¹⁾、直線棒材に限るが、これに基づく精度の良い非線形伝達式を用いた伝達マトリックス法による立体棒材の解析手法を既に提案している²⁾。今回、微小ひずみの仮定を導入した曲線棒材の伝達式を誘導したのでその過程について発表する。

2. 座標および初期形状：図-1に示す、空間での曲りとねじりをもつ部材を考える。座標系は、部材軸に沿って z 軸をとった直交曲線座標 (x, y, z) を用いる。部材の変形前の形状を、次のように定義する。

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} g_{x0} \\ g_{y0} \\ g_{z0} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} g_{x0} \\ g_{y0} \\ g_{z0} \end{Bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & -\kappa_y \\ -\tau & 0 & \kappa_x \\ \kappa_y & -\kappa_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1 \cdot a, b)$$

ここで、 (g_{x0}, g_{y0}, g_{z0}) は座標軸 (x, y) の原点における基底ベクトルであり、 (κ_x, κ_y) と τ は、物理的にはそれぞれ (x, y) 軸方向の曲率と (x, y) 軸原点の z 軸に関するねじり率に相当する。また、任意点の位置ベクトル R は、部材軸の位置ベクトルを R_0 とすると、次のようにかける。

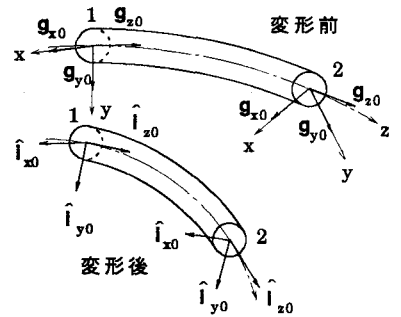
$$R = R_0 + x g_{x0} + y g_{y0} \quad (2)$$

式(1), (2)より任意点の基底ベクトルは、次のようになる。

$$g_x = g_{x0}, \quad g_y = g_{y0},$$

$$g_z = -y\tau g_{x0} + x\tau g_{y0} + (1 - \kappa_y x + \kappa_x y) g_{z0}$$

(3 · a~c) 図-1 座標系および基底ベクトル



3. 変形後の幾何：外力により、図-1に示すように変形した

部材を考える。変形した部材の幾何は、通常の変位成分の代わりに部材軸の変形成分で表現する。変形成分は未知の4つの量 $\hat{\kappa}_x, \hat{\kappa}_y, \hat{\tau}$ と $\sqrt{\hat{g}_0}$ で次のように定義される。

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} \hat{i}_{x0} \\ \hat{i}_{y0} \\ \hat{i}_{z0} \end{Bmatrix} = [\hat{D}] \begin{Bmatrix} \hat{i}_{x0} \\ \hat{i}_{y0} \\ \hat{i}_{z0} \end{Bmatrix}, \quad \hat{g}_{z0} = \sqrt{\hat{g}_0} \hat{i}_{z0}, \quad [\hat{D}] = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\tau} & -\hat{\kappa}_y \\ -\hat{\tau} & 0 & \hat{\kappa}_x \\ \hat{\kappa}_y & -\hat{\kappa}_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4 \cdot a \sim c)$$

ここで、 $(\hat{i}_{x0}, \hat{i}_{y0}, \hat{i}_{z0})$ は、部材軸上で直交する変形後のベースベクトル $(\hat{g}_{x0}, \hat{g}_{y0}, \hat{g}_{z0})$ を標準化して得られる単位ベクトルであり、物理的には、 $(\hat{\kappa}_x/\sqrt{\hat{g}_0}, \hat{\kappa}_y/\sqrt{\hat{g}_0})$, $\hat{\tau}/\sqrt{\hat{g}_0}$ そして $\sqrt{\hat{g}_0}-1$ は、それぞれ、変形した x, y 軸方向の曲率成分、変形した部材軸のねじり率および伸び率に相当する。また、任意点 (x, y, z) の変形後の位置ベクトル $\hat{R}$ は、部材軸の変形後の位置ベクトルを $\hat{R}_0$ とすると、はりの仮定より次のようにかける。

$$\hat{R} = \hat{R}_0 + x \hat{i}_{x0} + y \hat{i}_{y0} \quad (5)$$

式(4), (5)より、任意点の変形後のベースベクトルは次式で与えられる。

$$\hat{g}_x = \hat{i}_{x0}, \quad \hat{g}_y = \hat{i}_{y0}, \quad \hat{g}_z = -y\hat{\tau} \hat{i}_{x0} + x\hat{\tau} \hat{i}_{y0} + (\sqrt{\hat{g}_0} - x\hat{\kappa}_y + y\hat{\kappa}_x) \hat{i}_{z0} \quad (6 \cdot a \sim c)$$

4. ひずみ場、応力-ひずみ関係式：式(3), (6)および、微小ひずみの仮定として曲げひずみ、せん断ひずみならびに伸びひずみに相当する諸量の絶対値が次式のように1に比べて無視できるとすると、

$$|(\hat{\kappa}_y - \kappa_y)x| \ll 1, \quad |(\hat{\kappa}_x - \kappa_x)y| \ll 1,$$

$$|(\hat{\tau} - \tau)x| \ll 1, \quad |(\hat{\tau} - \tau)y| \ll 1, \quad |\sqrt{\hat{g}_0} - 1| \ll 1 \quad (7 \cdot a \sim e)$$

Greenのひずみテンソルの非零要素は、変形成分により次のように表される。

$$\begin{aligned} e_{zz} &= (\hat{g}_z \cdot \hat{g}_z - g_z \cdot g_z) / 2 = (1 - \kappa_y x + \kappa_x y) \{ \sqrt{\hat{g}_0} - (\hat{\kappa}_y - \kappa_y) x + (\hat{\kappa}_x - \kappa_x) y \} - 1 \\ e_{zx} &= e_{xz} = (\hat{g}_z \cdot \hat{g}_x - g_z \cdot g_x) / 2 = -y (\hat{\tau} - \tau) / 2 \\ e_{zy} &= e_{yz} = (\hat{g}_z \cdot \hat{g}_y - g_z \cdot g_y) / 2 = x (\hat{\tau} - \tau) / 2 \end{aligned} \quad (8 \cdot a \sim c)$$

また、応力-ひずみ関係式は、 $(\bar{x}, \bar{y})$ を (x, y) に一致させ $\bar{z}$ 軸は (x, y) 座標原点で z 軸に接する方向にとった直交デカルト座標 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ で次のように定義される。

$$\sigma^{\bar{z}\bar{z}} = E e_{\bar{z}\bar{z}}, \quad \sigma^{\bar{z}\bar{x}} = 2G e_{\bar{z}\bar{x}}, \quad \sigma^{\bar{z}\bar{y}} = 2G e_{\bar{z}\bar{y}} \quad (9 \cdot a \sim c)$$

直交曲線座標系 (x, y, z) での応力テンソルとひずみテンソルの関係式は、式(9)でテンソルの座標変換を行うと次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma^{zz} &= E (e_{zz} - 2e_{zy} x \tau + 2e_{zx} y \tau) / \rho^4 \\ \sigma^{zx} &= 2G e_{zx} / \rho^2 + E (e_{zz} - 2e_{zy} x \tau + 2e_{zx} y \tau) y \tau / \rho^4 \\ \sigma^{zy} &= 2G e_{zy} / \rho^2 - E (e_{zz} - 2e_{zy} x \tau + 2e_{zx} y \tau) x \tau / \rho^4 \\ \rho &= 1 - \kappa_y x + \kappa_x y \end{aligned} \quad (10 \cdot a \sim d)$$

5. つり合い式および境界条件式：以上のようなひずみ場に対して、つり合い式および連成する境界条件式は、文献1)に示されるように、つり合った変形状態からの微小な仮想の変位増分による仮想仕事の原理を用いて求められる。ただし、この定式化手法では変位成分の代わりに変形成分を用いているので通常の表現の断面力成分および変位成分は、それぞれ変形成分との関係式から求められる。

6. 断面力成分、変位成分と変形成分の関係：断面力成分と変形成分の関係式は、まず、応力テンソルと変形成分の関係を式(10)に式(8)を代入することで求め、さらに文献1)で定義された断面力成分の定義式に代入して積分を実行すれば得られる。一方、回転変位は、変形前のベースベクトル (g_{x0}, g_{y0}, g_{z0}) と単位ベクトル $(\hat{i}_{x0}, \hat{i}_{y0}, \hat{i}_{z0})$ の間の方向余弦を用いて表現する。これは、次のように定義する。

$$\begin{Bmatrix} \hat{i}_{x0} \\ \hat{i}_{y0} \\ \hat{i}_{z0} \end{Bmatrix} = [\ell_{ab}] \begin{Bmatrix} g_{x0} \\ g_{y0} \\ g_{z0} \end{Bmatrix}, \quad [\ell_{ab}] = \begin{Bmatrix} \ell_{\hat{x}x}, \ell_{\hat{x}y}, \ell_{\hat{x}z} \\ \ell_{\hat{y}x}, \ell_{\hat{y}y}, \ell_{\hat{y}z} \\ \ell_{\hat{z}x}, \ell_{\hat{z}y}, \ell_{\hat{z}z} \end{Bmatrix} \quad (11 \cdot a, b)$$

式(11・a, b)を z で微分し、式(1), (4), (11・a)を考慮すると、方向余弦と変形成分の関係は次のようになる。

$$\frac{d}{dz} [\ell_{ab}] = [\hat{D}] [\ell_{ab}] - [\ell_{ab}] [D] \quad (12)$$

また、ベクトル (g_{x0}, g_{y0}, g_{z0}) 方向の部材軸線の変位は、 (u_0, v_0, w_0) と表すと、変形後の部材軸の位置ベクトル $\hat{R}_0$ は並進変位成分で次のように表される。

$$\hat{R}_0 = R_0 + u_0 g_{x0} + v_0 g_{y0} + w_0 g_{z0} \quad (13)$$

上式(13)を z で微分し式(1)を考慮し、変形後の部材軸の基底ベクトルを変形成分で表現しそこに式(4), 式(11)を代入すれば、並進変位成分の微係数が、次のように変形成分と方向余弦で表される。

$$\begin{aligned} u_0' &= \sqrt{\hat{g}_0} \ell_{\hat{z}x} + \tau v_0 - \kappa_y w_0, \quad v_0' = \sqrt{\hat{g}_0} \ell_{\hat{z}y} - \tau u_0 + \kappa_x w_0 \\ w_0' &= \sqrt{\hat{g}_0} \ell_{\hat{z}z} - 1 + \kappa_y u_0 - \kappa_x v_0 \end{aligned} \quad (14 \cdot a \sim c)$$

7. あとがき：今後は、この曲線棒材の伝達式を、伝達マトリックス法による立体棒材の解析手法に適用して曲線要素を持った立体骨組み構造の解析を行う。

- 【参考文献】 1)Goto, Y., et. al: A New Formulation of Finite Displacement Theory of Curved and Twisted Rods, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol. 2, No. 2, 1985
2)Goto, Y., et. al: Direct Lagrangian Nonlinear Analysis of Elastic Space Rods using Transfer Matrix Technique, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol. 5, No. 1, 1988