V－24

板要素と三次元要素の接合方法に関する研究

○名古屋大学　学生会員　村中健二
名古屋大学　正会員　田辺忠顕

1．はじめに

板的挙動を示すマット上に構造物が付帯している様な場合の解析においては、全体構造物中の局所的な応力挙動を、詳細にとらえる必要がしばしば生ずる。この種の問題では、全体構造物としては板的挙動だけでなく局所的に三次元挙動を示すので、単純に板要素と考えることはできず、何らかの形で、三次元解析を行う必要がある。しかし、従来の一般的な有限要素法解析では、データ作成が極めて、はん雑となり、また計算機使用の経済性に於て不利となる。

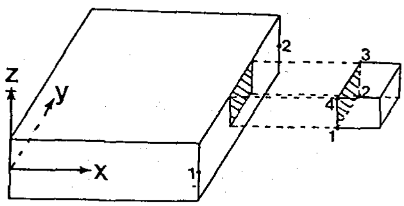
そのため、複雑な板形状をしたＲＣ構造物を、大きな板要素とそれを補う局所的な三次元要素の結合体として考え、自由度を減らした解析を行うことが必要とされる。

そこで、本研究においては、ラグランジュ未定乗数を用いて異自由度を有する板曲げ要素と三次元要素に対する結合の定式化を行った。

2．ラグランジュの未定乗数法による定式化

異なった自由度を有する２つの要素を結合する場合に、その仮想の境界面上での両要素の変位差が零になる条件をラグランジュの未定乗数法を用いて表すと、次のマトリクス表示による変分式が得られる。[1]

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\delta\{\Delta q^{(\alpha)}\}^t[[K^{(\alpha)}]\{\Delta q^{(\alpha)}\}+[\hat{K}^{(\alpha)}]\{\Delta\gamma\}+\{\Delta F^{(\alpha)}\}]$$
$$+\delta\{\Delta\gamma\}^t\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\hat{K}^{(\alpha)}\right]^t\{\Delta q^{(\alpha)}\}=0 \qquad (1)$$



図－１　結合の概念図

ここで

$$[\hat{K}^{(1)}]=-\int_{S^{(12)}}[\Psi^{(1)}][\Omega]dS \qquad (2)$$

$$[\hat{K}^{(2)}]=\int_{S(12)}[\Psi^{(2)}][\Omega]dS \qquad (3)$$

ただし、（）内の添字$\alpha=1$は板要素、$\alpha=2$は三次元要素を示し、$S^{(12)}$は仮想境界面を示す。また、［$K^{(\alpha)}$］（$\alpha=1,2$）はそれぞれの要素の剛性マトリクス、［$\hat{K}^{(\alpha)}$］（$\alpha=1,2$）はそれぞれ板要素領域と三次元要素領域での結合に関するマトリクスを示す。

なお、｛$\Psi^{(\alpha)}$｝（$\alpha=1,2$）は、$S^{(12)}$と領域$V^{(1)}$，$V^{(2)}$を結合する結合要素の補間マトリクスでありさらに$S^{(12)}$上のラグランジュ未定乗数｛$\Delta\lambda$｝は補間マトリクス［Ω］により次のように補間される。

$$\{\Delta\lambda\}=[\Omega]\{\Delta\gamma\} \qquad (4)$$

ここに、｛Δγ｝はS$^{(12)}$上の結合要素に関する一般化座標の列マトリクスである。
さて、δ｛Δq$^{(\alpha)}$｝とδ｛Δγ｝は任意の値を持つことにより、変分をとると、平衡方程式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} [K^{(1)}] & [0] & [\hat{K}^{(1)}] \\ & [K^{(2)}] & [\hat{K}^{(2)}] \\ sym. & & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta q^{(1)}\} \\ \{\Delta q^{(2)}\} \\ \{\Delta\gamma\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\Delta F^{(1)}\} \\ \{\Delta F^{(2)}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \qquad (5)$$

3．板要素と立体要素の結合

板要素とそれに付帯した立体要素から成るモデルを考え、板要素に対しては、節点自由度3（Z方向変位、X，Y方向回転角）をもつ板曲げ要素を用い、立体要素に対しては、節点自由度3（X，Y，Z方向変位）をもつアイソパラメトリック要素とすると、異自由度を有する両要素の結合を考える必要が生じる。そこで、上記のラグランジュ未定乗数法により両要素の結合を行った。

板要素と立体要素の結合に対しては、結合要素の補間マトリクスΨ$^{(1)}$、Ψ$^{(2)}$は次のように仮定できる。

$$[\Psi^{(1)}] = \begin{bmatrix} -z\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & -z\frac{\partial N_3}{\partial x} & -z\frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & -z\frac{\partial N_6}{\partial x} \\ -z\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & -z\frac{\partial N_3}{\partial y} & -z\frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & -z\frac{\partial N_6}{\partial y} \\ N_1 & 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_6 \end{bmatrix}$$

ここで、N_1，N_3，N_4，N_6はそれぞれw^1，$\theta_y{}^1$，w^2，$\theta_y{}^2$に対する板曲げ要素の形状関数である。

$$[\Psi^{(2)}] = [\,[\Psi_1]\ [\Psi_2]\ [\Psi_3]\ [\Psi_4]\,]$$

ここで、

$$[\Psi_i] = \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_i & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\Psi}_i & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\Psi}_i \end{bmatrix} \quad i=1,2,3,4$$

$\hat{\Psi}_i$：2次元4節点のアイソパラメトリック要素の補間関数

次にラグランジュ未定乗数は要素内で一定と仮定すると式（4）の補間マトリクスは、次のように仮定できる。

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

このように、求まる［K］を用いて、式（5）を解くことによりモデル全体としての解析を行うことができる。

なお、詳細は、当日発表する予定である。

4．参考文献

1）　矢川元基他、ラグランジュ未定乗数法を用いた効率的な弾塑性構造解析用プログラム”EPAS”の開発と応用、日本機械学会講演論文集、1979