

交通流の安定性に関する基礎的考察

信州大学工学部 正会員 奥谷 康
信州大学工学部 ○野口 修一

1. まえがき

近年、我が国の高速道路、特に都市間高速道路では、交通需要の著しい増加に伴い至る所で自然渋滞が発生している。この自然渋滞の発生原因としては、上流側の車が渋滞以外の何らかの原因で減速したとする。すると、そのために車間距離が狭まり交通密度が微小増加して、それが下流側に影響を与え自然渋滞を誘発していると考えられている。しかし、このような現象についての理論的解明は未だなされているとは、言い難い状況にある。そこで本研究では、最近さまざまな分野で注目を浴びているカオス的な概念、すなわち非線形の微分、差分方程式で表現される動的仮定の数値的不安定現象の数学的解明法の援用により、こうした交通流の自然渋滞という物理的現象の究明に対して1つの理論的ベースを供するという視点から基礎的な検討を行うものである。

2. 交通流モデル

交通流モデルには、流体力学を基に導かれた単純連続モデル、追従理論に基づいて導かれた動的モデルであるペインモデルや統計熱力学に基づいてボルツマン方程式から導かれたフィリップスモデル等があるが、本研究では最初の解析においては、単純連続モデルを用いより一般性指向した第2番目の解析においては、交通工学分野で広汎に採用されているペインモデルを考察の対象とする。すなわち

$$\text{連続の式: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1) \quad (\text{単純連続モデル})$$

$$\text{運動の方程式: } \frac{\partial \rho}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{T} \left[u - u_*(\rho) + \nu \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] \quad (2)$$

ここに、 ρ は交通密度、 u は速度、 q は交通量、 t は時間、 x は距離、 T は反応時間、 u_* は平衡速度であり ν 、 u_* については以下に示す通りである。

$$\nu = -\frac{1}{2} \frac{d \rho_*}{d \rho} \quad (3), \quad u_*(\rho) = u_f \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{max}} \right)^{l-1} \right]^{\frac{1}{m-1}} \quad (4)$$

l : 定数、 m : 定数、 u_f : 自由速度

3. 解析方法(1)

最初の解析においては、(1)式を時間的、空間的に離散化した差分方程式を対象としてカオス的な現象の解明の典型的な方法論の適応により所与の問題へのアプローチを試みる。図1は道路を Δx の区間に分割したものであり、図中の ρ 、 u 、 q はすでに定義した密度、速度、交通量の各区間に対応した値を示している。

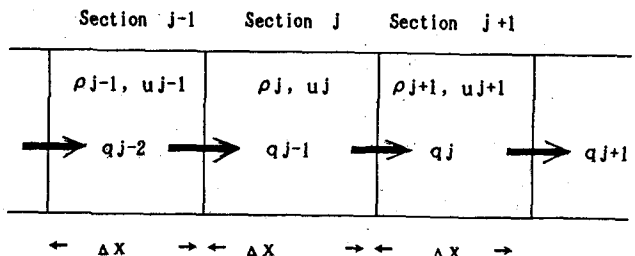


図-1 Variables for the spatially discrete model

これらの値を用いて区間 j に対する連続の方程式を示すと次式ようになる。

$$\rho_j(t+1) = \rho_j(t) + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\rho_{j-1}(t) u_{j-1}(t) - \rho_j(t) u_j(t)] \quad (5)$$

$\rho_j(t)$: j 区間での t 時刻における密度、 $\rho_j(t+1)$: j 区間での $(t+1)$ 時刻における密度
今、平衡状態(初期状態)における交通密度、速度を ρ_0 、 u_0 としたとき、 $\rho_{j-1}(t) \approx \rho_0$ 、 $u_{j-1}(t) \approx$

$u_j(t)$ と仮定、(4)式で $m=0$ 、 $l=2$ としたグリーン・シールズの平衡速度式を採用するものとする。

$$\rho_j(t+1) = \rho_j(t) + u_j \times \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\rho_0 \left\{ 1 - \frac{\rho_j(t)}{\rho_{max}} \right\} - \rho_j(t) \left\{ 1 - \frac{\rho_j(t)}{\rho_{max}} \right\} \right] \quad (6)$$

(6)式において次のように置き換える。

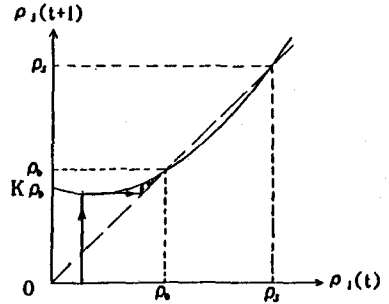
$$\rho_{j+1}(t) = \rho_j + K \rho_0 - K \rho_0 \rho_j / \rho_0 - K \rho_j(t) + K \rho_j(t)^2 / \rho_0 \quad (7)$$

ここに $K = u_j \times \Delta t / \Delta x$ 、 $\rho_0 = \rho_{max}$ である。

$\rho_j(t)$ のグラフの形状を考え、加えてロバート・メイの数値実験を参考にして密度の安定・不安定条件を考えてみると、 $0 < K < 1$ のとき

$\rho_j(t)$ のグラフが下に凸のためすべての場合安定といえる。例として $1/(1+\rho_0/\rho_{max}) < K < 1$ の場合のグラフを図-2に示す。ここで

は、 $\rho_j(t)$ のあらゆる条件に対して安定となることがわかるが、このことは現実を反映していない。以下では別の視点から問題の考察を試みる。



4. 解析方法(2)

2番目の解析では、(1)式の連続の方程式に加えて(2)式で表される運動方程式を導入したペインモデルを用いて交通流の安定・不安定性に関する分析を試みる。まず密度、速度について平衡状態から微小な擾乱が発生した状況を考え

$$\rho(k, x) = \rho_0 + \tilde{\rho}(t) f(k, x) \quad (8), \quad u = u_0 + \tilde{u}(t) f(k, x) \quad (9)$$

とする。 k は任意の定数、 $\tilde{\rho}(t) f(k, x)$ 及び $\tilde{u}(t) f(k, x)$ は密度、速度の擾乱項を示している。

(8)、(9)式を(1)、(2)へ代入すると $\tilde{\rho}(t)$ 、 $\tilde{u}(t)$ に関する常微分方程式が導出されるがその特性方程式を書くと、

特性方程式： $S^2 - p \times S + q = 0$

ここに $p = -2u_0 f_x / f - 1/T$ (10) ここでは $f(k, x) = f$ 、 $df/dx = f_x$ とおく。

$$q = f_x \left[u_0 \{ u_0 f_x / f + 1/T \} + \rho_0 \{ -2\nu/T - \nu f_x / (T \rho_0 f) \} \right] \quad (11)$$

このような特性方程式が得られると、直ちに交通流の安定・不安定性が以下のように与えられる。

(1) $q < 0$	: 不安定	平衡点は	鞍点
(2) $q > 0$, (A) $p^2 - 4q \geq 0$, (a) $p > 0$	: 不安定		不安定結節点
	(b) $p < 0$	: 安定	安定結節点
, (B) $p^2 - 4q < 0$, (a) $p > 0$	: 不安定		不安定スパイラル点
	(b) $p < 0$	: 安定	安定スパイラル点
, (C) $p = 0$	:		渦心点

これらの3つの条件からそれぞれについて安定条件と平衡点の種類がわかり、さらにこの条件を具体的に図示すれば安定条件が視覚的にも読み取れることになる。1例として $f(k, x) = \text{EXP}(-x+k)$ (12)として、 $l=2.40$ 、 $m=0.75$ の場合 (ア)と $l=2$ 、 $m=0$ の場合 (イ)について考えてみる。特性方程式は

$$S^2 - \left(2u_0 - \frac{1}{T} \right) S + \left(u_0^2 - \frac{u_0}{T} - \frac{2\nu}{T} \rho_0 - \frac{\nu}{T} \right) = 0 \quad (13)$$

となり、これから安定条件を $T-\rho_0$ 平面について $\rho_0 \geq 40$ [台/km] であるとして考えると、(ア)の場合は、平衡点が不安定結節点となることはなく、(イ)の場合は、平衡点は上の全ての場合を含んでいる。なお両者とも安定条件は、特性方程式の解が実数部において負となることに対応している。

5. 結び

以上2つのアプローチについて基礎的な考えを示したが、具体的な数値計算結果については当日発表する予定である。また $f(k, x)$ のより一般的な式についての考察については現在検討中である。