

開水路の流れの三次元数値解析法

信州大学工学部 正員 富所 五郎 学生員 ○田中 康雄・菅原 秀雄

1. はじめに

開水路の流れに大きな影響を及ぼす要因の一つとして、渦動粘性係数が挙げられる。この渦動粘性係数については、現在、いくつかのモデルが提案されている。

本研究の目的は、流速などの形状関数に対して水平方向の区分多項式と鉛直方向の余弦関数の積を用いる Galerkin 有限要素法¹⁾を用いて、渦動粘性係数の与え方による開水路の流れを考えるものである。

2. 基礎方程式

開水路の流れを支配する基礎方程式は、以下のものである。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L \cdot u + w \frac{\partial u}{\partial z} = g \cdot I_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + D \cdot u \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + L \cdot v + w \frac{\partial v}{\partial z} = g \cdot I_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + D \cdot v \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + L \cdot w + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + D \cdot w \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

ただし、

$$L = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad D = \frac{\partial}{\partial x} (A_h \frac{\partial}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_h \frac{\partial}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_v \frac{\partial}{\partial z})$$

ここに、 x 軸は x 方向の平均勾配 I_x に平行に、 y 軸は y 方向の平均勾配 I_y に平行に水面付近にとり、また z 軸は x - y 平面に直角に、鉛直上方を正としている(図-1)。また、 u, v, w はそれぞれ x, y, z 軸方向の流速成分、 t は時間、 ρ は水の密度、 P は圧力、 g は重力加速度、 A_h, A_v はそれぞれ水平、鉛直渦動粘性係数である。

次に、これらの式を実際の解析に用いる形に変形する。まず、式(3)を一般の開水路では w が u, v に比べて小さいという事を踏まえて、 $z \sim \zeta$ の範囲で z について積分すると、式(5)を得る。

$$P = \rho g (-z + \zeta) \quad (5)$$

また、式(4)を $-h \sim \zeta$ の範囲で z について積分すると、式(6)が得られる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} u \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} v \cdot dz = 0 \quad (6)$$

同様に、式(4)を $-h \sim z$ の範囲で積分して w を求め、得られた式を式(1)、(2)に代入し整理すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L \cdot u - \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v \cdot dz \right) \frac{\partial u}{\partial z} = g \cdot I_x - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + D \cdot u \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + L \cdot v - \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v \cdot dz \right) \frac{\partial v}{\partial z} = g \cdot I_y - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + D \cdot v \quad (8)$$

となる。式(6),(7),(8)は、 u, v, ζ を未知量とする連立微分方程式である。

3. 基礎方程式の離散化

基礎方程式を空間変数について離散化するために、次の近似関数を考える。

$$\left. \begin{aligned} u &= N_i \cdot \cos(B_p \cdot z') \cdot u_{pi}, & v &= N_i \cdot \cos(B_p \cdot z') \cdot v_{pi} \\ A_v &= N_i \cdot \cos(B_p \cdot z') \cdot A_{vi}, & \zeta &= N_i \cdot \zeta_i \end{aligned} \right\} \quad B_p = \frac{p-1}{d} \pi \quad \left(\begin{array}{l} p=1, 2, \dots, m \\ i=1, j, k \end{array} \right) \quad (9)$$

ここに、 $d=h+\zeta, z'=z-\zeta$ であり、 $N_i = N_i(x, y)$ は形状関数で、ここでは三角形一次要素のものをを用いる。また、 m は各変数に対する展開項数である。 A_h は、要素内で一定値とした。

次に、基礎方程式(7),(8)に対し重み関数として、 $N_i \cdot \cos(B_p \cdot z')$ を、式(6)には N_i をかけ、重み関数の定義域内で積分を行う。一つの要素に対して、一つの要素方程式が得られ、要素が多数存在する時には、要素

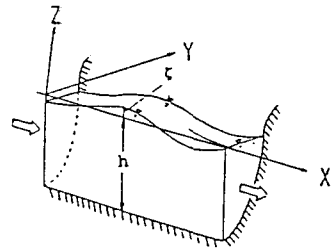


図-1 座標の定義

方程式の各項を要素ごとに求め、重み関数に従って重ね合わせれば良い。次に、時間変数に対する離散化法について述べる。時間微分項以外を全て右辺に移すと、この式は時間に関する常微分方程式となる。この微分方程式の積分法として、陽的時間積分法である Two-step Lax-Wendroff法を用いて解いてゆく。なお、要素方程式、及び時間に関する常微分方程式についての詳細は、文献(1)を参照されたい。

4. 計算結果

計算に用いた開水路は、横184m、縦20mの長方形開水路であり、 $h=0.1\text{m}$ 、 $I_x=0.001$ 、 $A_h=0.12(\text{m}^2/\text{s})$ である。鉛直渦動粘性係数については、(a)実際に分布の形状を与える方法²⁾ (b)LESモデルによって評価された形状による方法³⁾ によって与えた。(a)については、開水路の底面の粗度、及び水面の分子粘性を考慮して、次式によって与えるものとする。

$$A_v = 0.120 \cdot z \cdot (10.192 - z) + 0.01 \quad (\text{cm}^2/\text{s}) \quad (10)$$

(b)については、次式で与えられ、係数 $C=0.2$ を与えて行った。 m は流速の展開項数である。

$$A_v = (C \cdot h/p)^2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\}^{(1/2)} \quad (p=1, 2, \dots, m) \quad (11)$$

解析は、本方法によるものと、また比較のために解析的手法⁴⁾の二通りについて行った。得られた結果を表-1、図-2に示す。解析解と(a)の本方法による比較を行うと、展開項数が大きくなるにつれ、一致してくる事がわかる。しかし、底における値は、一致を見ない。これは、底において急激な変化が起こるためであると考えられる。次に、LESモデルと(a)の A_v の分布の比較であるが、かなりの違いがみられる。にもかかわらず、流速の分布に対して大きな違いが見られないのは、 A_v の分布の平均値が近いためであると思われる。

表-1 流速 (cm/s)

水深 (z/h)	解析的 手法 ⁴⁾	(a)による本方法			LES m= 8
		m= 4	m= 8	m=16	
0.0	57.597	58.100	57.700	57.600	58.700
0.1	56.747	57.321	56.555	56.360	57.362
0.2	55.800	55.510	55.433	55.383	55.885
0.3	54.733	53.769	54.694	54.321	54.784
0.4	53.506	52.769	53.113	53.210	52.768
0.5	52.062	52.100	52.000	51.700	51.300
0.6	50.308	50.590	50.067	50.017	49.065
0.7	48.072	47.391	47.745	47.624	46.414
0.8	44.984	42.931	45.287	44.490	44.382
0.9	39.960	38.919	38.506	39.995	39.140
1.0	24.595	37.300	33.500	30.200	35.100

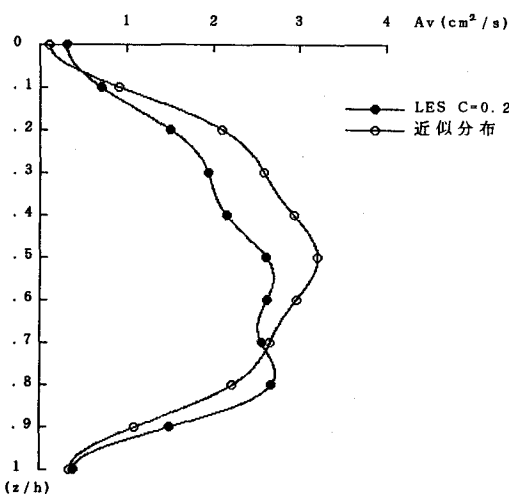


図-2 A_v の鉛直分布

5. おわりに

今回の数値計算では、 A_v の分布の評価に対し、二通りの方法を用いた。この内 LESモデルでは、考える余地が多に残っていると考えられる。今後はこれを含め、 $k-\varepsilon$ モデルについても検討していきたいと思う。

【参考文献】

- 1) 富所, 荒木, 吉田: 開水路の流れの三次元数値解析法, 第29回水理講演会論文集, pp. 727~732, 1985.
- 2) 岩佐義朗: 水理学, 朝倉書店, pp. 246~248, 1967.
- 3) 広瀬, 岩佐, 申: LESを用いた湖流の数値解析, 土木学会第44回年次学術講演会, pp. 578~579, 1989.
- 4) B.R. Peace and C.K. Cooper: Numerical Circulation Model for Wind Induced Flow, J. Hydraulics Division, ASCE, HY 3, 1981, pp. 285~302.