MacCormack法による 1次元河床変動計算

岐阜大学工学部　正会員　河村三郎
岐阜大学工学部　正会員　中谷　剛
岐阜大学工学部　学生員　○沢田良二
岐阜大学工学部　学生員　佐竹英樹

1．はじめに　今日の山地丘陵地域の土地利用状況は，宅地開発のみならず高原型リゾート開発など，かってないほど高度化されたものになってきている．したがって，山地丘陵部の流路には，水災害，土砂災害に対する防災機能の強化と自然景観との調和という複雑な条件を要求されている．こうした要求に答えるためには，流路内の流れの水理学的特性，および土砂水理学的特性を知る必要がある．しかし，河床変動を制御するための床固め工などの構造物を有する流路工では，その具備すべき防災機能を定量的に評価する手法もまだ確立されていない．本研究では，山地河川流路工のような急勾配流路内の常流・射流の混在する流れを対象とした河床変動計算法を提案する．

2．基礎方程式と差分式　常流，あるいは射流を対象とした河床変動計算は，流砂の連続式を前者で後退差分，後者で前進差分し，水面形計算の結果から得られる流砂量を用いて行われるのが一般的である[1]．しかし，この方法では跳水前後の点では差分が重なり合い，これらの点での河床高の決め方が明かでない[2]．また，山地河川流路工のような急勾配流路内の流れは常流・射流の混在する複雑な流れとなっており，常流区間あるいは射流区間を区別することが難しい．そこで，水面形計算では衝撃波獲得法として知られるMacCormack法を利用する．MacCormack法は，跳水を伴うような水面形の計算にも適用が可能であるため[3]，この計算法と流砂の連続式を組み合わせることで，常流・射流の混在する複雑な流れ場でも差分ｽｷｰﾑを変えることなく，上流側から下流に向かって河床変動計算を進めることが可能となると考えられる．

使用する基礎方程式は，流水の1次元運動方程式と連続式，および流砂の連続式である．MacCormack法は2次精度の予測子修正子法で，差分ｽｷｰﾑを示せば以下のようになる．

予測子段階：

$$\bar{U}_j = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(E_j^n - E_{j-1}^n\right) + \Delta t\, C_j^n \qquad (1)$$

修正子段階：

$$U_j^{n+1} = \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(U_j^n + \bar{U}_j\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\bar{E}_{j+1} - \bar{E}_j\right) + \frac{\Delta t}{2}\bar{C}_j^n \qquad (2)$$

ただし、

$$\bar{E}_j = E\left(\bar{U}_j\right), \quad \bar{C}_j = C\left(\bar{U}_j\right)$$

$$U = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} Q \\ (P/\rho)_B + (Q^2/A) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ gA\left(i - n^2 Q\,|\,Q\,|\,/A^2 R^{4/3}\right) \end{bmatrix}$$

流砂の連続式の差分は計算の安定性を考慮し，Delft Hydraulic Laboratory Method[4]のものを採用した．

$$z_j^{n+1} = (1-\alpha)\, z_j^n + \alpha\left(z_{j+1}^n + z_{j-1}^n\right)/2 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(Q_{b\,j+1}^{\,n} - Q_{b\,j-1}^{\,n}\right) \qquad (3)$$

ここに，Qは流量，pは全水圧，Aは流積，gは重力加速度，iは河床勾配，nはManningの粗度係数，Rは径深，zは河床高，Bは水路幅，λは空隙率，xは上流からの距離，tは時間，αは差分ｽｷｰﾑを安定なものとするための係数である．

MacCormack法は跳水のような水理学的に不連続な現象も再現することができるが，その場合物理的に意味の無い数値振動を生ずる．そのため，人工粘性項などを導入して数値的な不安定性を制御する必要がある．

ここでは，ＴＶＤ形式の人工粘性を採用した[5]．図１にBurgers 方程式による不連続面の移動を，1次精度のLax-Wendroff法，2次精度のMacCormack法，MacCormack法に，一般的な人工粘性項を付加した場合，およびTVD形式の人工粘性項を付加した場合の数値実験の結果を示す．1次精度のLax-Wendroff法では数値振動は見られないものの，不連続面が鈍ってしまう．一般的な人工粘性項を使用した場合は，数値振動の振幅は小さくなるが，数値振動そのものは抑えきれない．一方，TVD形式の人工粘性項は，僅かに不連続面が鈍るものの，数値振動を完全に制御できることがわかる．山地河川流路工のような急勾配流路内の流れでは，常流，射流が混在していると考えられるので，今後の計算では，安定性の高いTVD形式の人工粘性項を使用する．制限関数(flux limiter)は何種類かが提案されているが[6]，ここではD.M.Causon[7]と同様のものを使用した．

４．計算結果　図２に，河床変動の数値実験例を示す．河床勾配を1/100 とし，流れは常流である．下流端から水面形を計算した後，後退差分された流砂の連続式から河床変動を計算するのが一般的ではあるが，本研究で提案した計算法では，水面形及び砂堆の移動状況を上流から下流へ向かって計算を進めることで再現できた．なお，流砂量公式はMeyer-Peter-Müllerの式を用い，河床材料は粒径2mm(n=0.0148相当)の一様砂とした．また，河床変動計算の時間間隔は⊿t=0.5secとし，1回の河床変動計算の後の水面形を⊿t=0.005sec間隔で40回繰り返すことで求めた．

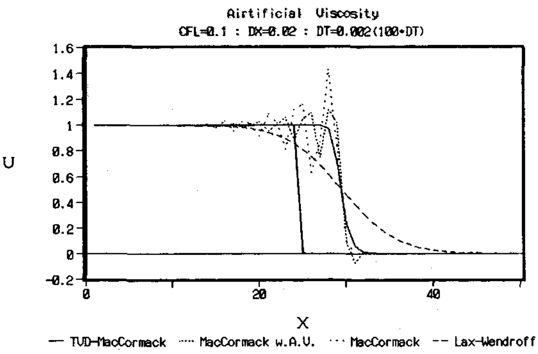

図１　人工粘性項の比較

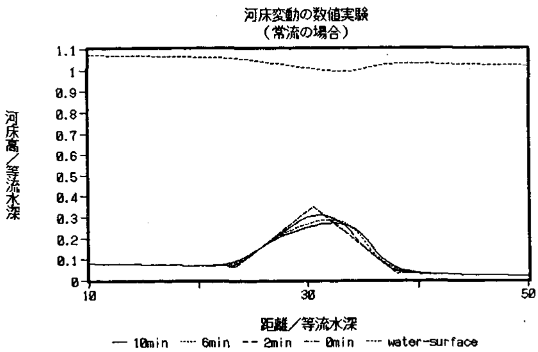

図２　河床変動の数値実験

５．おわりに　本研究で示した河床変動計算法では，常流，射流の区別なく常に上流から下流へ向かって計算を進めることができることがわかった．今後は，床固め工や落差工などの構造物が流路工内にあるような場合の河床変動計算へ適用を考えたい．

参考文献　1)黒木幹男,岸力,清水康行:河床変動の数値計算法に関する研究,第17回自然災害科学総合ｼﾝﾎﾟｼﾞｳﾑ講演論文集,pp.175-178,1980.　2)道上正規,藤田正治,前田真吾:非平衡浮遊砂を考慮した急勾配水路における貯水池堆砂の計算法,水工学論文集，第34巻，pp.367-372,1990.　3)河村三郎,中谷剛,潮田智道:保存則形差分法のｽｷｰﾑの特性に関する考察,土木学会第45回年次学術講演会講演概要集,第2部,pp.438-439,1990. 4)J.A.Cunge,F.M.Holly Jr.,A.Verwey :Practical Aspects of Computational River Hydraulics, pp.287-294,1980. 5)A.Harten :High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws,J.of Comp.Physics 49, pp.357-393,1983.　6)P.K.Sweby : High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws,SIAM J.Numer.Anal.,Vol.21,No.5,pp.995-1011,1984.　7)D.M.Causon:High Resolution Finite Volume Schemes and Computational Aerodynamics, Nonlinear Hyperbolic Equations-Theory, Computation Methods, and Applications, Notes on Numerical Fluid Mechanics,Vol.24,pp.63-74,1989.