I－9

はりの振動解析におけるStodola-Newmark法の数値安定性について

大同工業大学　正会員　○水澤富作
片山鉄工所　　正会員　　中平進夫

1．　はじめに

Newmark法[1]は，1943年にNewmarkにより提案され，はりの曲げ，振動，座屈計算に用いられ[2]，さらに，板構造の座屈解析[3]，振動解析[4]や骨組構造の解析[5]にも用いられている。 Newmark法は，厳密な基礎方程式を解くために，モールの定理と換算集中荷重の概念を用いた数値積分法である。 また，Stodola法と組み合わせることにより，単純な反復計算で固有値解析ができる。特に，マトリックス方程式を直接解く必要がないので，数値安定性の高い手法である。中平らは[6]，この方法を用いて変断面連続ばりの固有振動数を求めている。

本文では、はりの振動解析を例にとり，Stodola-Newmark 法の離散化概念と，その収束性や精度などの数値安定性について検討している。任意の断面特性や要素の分割数を考慮して，一般的な数値解析プログラムを作成している。また、本数値計算法の有用性を示すために，高次の振動数まで求めて，厳密解や他の数値解析法との比較検討も行っている。

2．　解析手法

2.1　Stodola-Newmark法の離散化概念

これまでに，非常に多くの数値解析手法が提案されており[7]，その離散化概念を２つに分類すると，[1] 厳密な支配方程式を近似的に解く解析法，[2] 種々の離散化操作により得られた連立方程式を厳密に解く解析法に分けられる。 [2]については，エネルギー原理，仮想仕事の原理や誤差分布の原理（重み付き残差法）と解析場を仮定する補間関数の種類により，多種多様な離散化手法が提案されている。 一方，[1]についても，各種の差分近似を用いた差分法，DR 法，状態ベクトルを用いた伝達マトリックス法や支配方程式の基本解を基にした積分方程式法などが挙げられる。 Stodola-Newmark法は，前者に属する一手法であり，弾性荷重 (M/EI)より求められる等価集中荷重の概念とモールの定理を用いた物理的な近似計算法であり，また反復法のStodola法を組合わせた固有値解析法である。

2.2　換算集中荷重　Newmark法では，解析領域を区分的領域（Panel）に分割し，各領域の区分点(Panel point)で，任意の分布弾性荷重と等価な換算集中荷重を求めなければならない。ここでは，線形分布や放物分布より求められる換算集中荷重を用いている。

Table 1.　Concept of Mohr’s theorem

Load=q	Curvature= $-M/EI_x$
Shear,Q= $-\int q\,dx$	Slope, $\theta=-\int (M/EI_x)\,dx$
Bending Moment,M= $\int Q\,dx$	Deflection, $\phi=\int \theta\,dx$

2.3　Stodola-Newmark法による式の定式化

変断面ばりの自由振動の基礎方程式は，$d^2(EI_x\phi'')/dx^2=\omega^2 m_x\phi$ ...(1)で与えられる。ここで， ϕはたわみであり，EI_xとm_xはそれぞれはりの曲げ剛性と質量であり，ωは円振動数である。Table 1には，モールの定理の基本式が示してある。 ここで，$q=m_x\phi$と置けば，Newmark法を用いてたわみがϕ/ω^2で求められる。　式(1)をStodolaの反復法で解くために，任意に仮定したｒ次の初期モード形状，$\phi_{0,r}$を用いて、$\phi_{1,r}$を計算する。 これを右辺に代入することにより，新しい$\phi_{2,r}$を求め，$\phi_{i+1,r}-\phi_{i,r}<\varepsilon$になるまで反復計算する。 したがって，$\phi_{i+1,r}/\phi_{i,r}=1$より，ｒ次の$\omega_r$が求められる。 ただし，たわみ計算では，境界条件に応じた共役ばりを用いている。

3．　数値計算例及び考察

はりの振動数の収束性や精度に与える分割数の影響について検討を行った。ここで，Stodola法の収束判定値として，$\varepsilon=10^{-5}$を用いた。Table 2には，単純ばりの振動数の収束性が示されている。これより，一様な収束状態が得られており，また収束値が厳密解と一致している。1000分割で計算しても反復回数は，１次で４回，５次で１８回の反復で収束し，８次モードまでの振動数がＰＣで１０分で計算でき，また、単精度計算でも桁落ちがまったく見られなかった。

Table 2. Convergence study of natural frequency parameter, $\lambda=\omega L^2\sqrt{\rho A/EI}$ of a simply supported uniform beam

Number of panels N	Modes				
	1st	2nd	3rd	4th	5th
4	9.8536	38.400			
8	9.8686	39.414	88.079	153.60	
10	9.8694	39.466	88.682	157.09	243.55
20	9.8696	39.477	88.808	157.81	246.34
40	9.8696	39.478	88.825	157.91	246.72
60	9.8696	39.478	88.826	157.91	246.74
1000	9.8696	39.478	88.826	157.91	246.74
Exact	9.8696	39.478	88.826	157.91	246.74

Table 3 は，高さと幅がTaper状に変化する片持ちばりの振動解析の結果である。得られた結果が高次の振動数まで厳密解や数値解と非常に良く一致している。本手法は，断面特性を連続関数で仮定できるので，任意の変断面ばりを解くことができる。また，水中でのタワーのような不連続の質量分布を持つはりや不連続剛性ばりなども容易に解くことができる。

Table 3. Frequency parameters, $\lambda=\omega L^2\sqrt{\rho A_0/EI_0}$ of cantilever beams with double-tapers; $\alpha=h_1/h_0=0.4$, $\beta=b_1/b_0=0.4$

Numbers of panels N	Modes							
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
10	5.0087	19.064	43.233					
20	5.0091	19.064	45.734	83.957				
40	5.0091	19.065	45.738	85.341	137.88	198.79		
80	5.0091	19.065	45.738	85.344	138.03	203.84	282.66	373.27
120	5.0091	19.065	45.738	85.344	138.04	203.84	282.79	374.84
150	5.0091	19.065	45.738	85.344	138.04	203.85	282.79	374.87
Comway*	5.0091	19.065	45.738	85.344	138.04	203.85	282.79	374.87
Downs**	5.0090	19.065	45.738	85.344	138.04	203.85	282.79	374.88
Mabie***	5.0087	19.062	45.736	85.32	138.0			

* The values are obtained by the analytical method(JAM, vol. 31, 1964), ** the results are calculated the dynamic discretization approach(JAM, 44, 1977) and *** the values are obtained by the numerical integration technique(JASA,51,1972)

4．あとがき

Stodola-Newmark法の数値安定性を示すために，はりの振動解析を例にとり検討を行った。この方法は，厳密な支配方程式を近似的に解くために， Newmarkの数値積分法とStodola 法を組合わせた固有値解析法である。分割数を増大させることにより，高次の振動数も一様な収束性が示され，また厳密解と完全に一致した解が得られた。本手法は，領域分割の離散化概念に基づくので，任意の変断面ばりなども容易に解くことができる。有限要素法などと比較しても，連立方程式を直接解く必要がないので，分割数を高めても桁落ちの心配がなく，非常に経済的な手法である。また，高次の振動モードも正確に求められるので，Modal analysis法に適用すれば，容易に動的応答解析も可能である。

参考文献

1. Newmark, N.M.:A numerical procedure for computing deflections, moments and buckling loads. Trans. ASCE, vol. 108, pp. 1161-1188, 1943.
2. 成岡: ニューマークの数値計算法(梁,柱の曲げ,振動,座屈に関連して),技報堂出版、1978.
3. Lind, N.C.: Numerical buckling analysis of plate assemblies. ASCE, J. Struct. Div., vol. 104, pp. 329-339, 1978.
4. Nakahira, N. et al.: Numerical vibration analysis of plate structures by Newmark's method. J. Sound Vib., vol. 99, pp. 183-198, 1985.
5. Nakahira, N. et al.:Vibration of plane trusses.... Comput. and Struct., vol. 37(4), 1990.
6. 中平他:Newmarkの数値計算法によるはりの固有振動周期の計算,土木学会誌, Vol.68, pp.48-54,1983.
7. 水澤: Spline関数を用いた構造解析に関する一考察. 大同工業大学紀要, Vol. 25, pp.199-212,1989.