

衝撃荷重を受ける軸対称厚肉円盤の過渡応力波伝播

信州大学 学生員 ○赤堀 裕

正 員 石川 清志

正 員 夏目正太郎

本研究は、表面自由境界に衝撃荷重を受ける軸対称Voigt型粘弾性体厚肉円盤の過渡応力波伝播解析を行ったものである。解析は次のような手法による。連立偏微分方程式で表わされる運動方程式の解を級数と置くと、ベッセルの微分方程式を用いて空間の変数が分離される。さらに、時間の1階微分が含まれる粘弾性動的問題において有用とされるStokes法を適用し変数分離の固有関数を導入すると、運動方程式は空間と時間についての微分方程式に分離される。よって、各々の境界条件および初期条件のもとで直接的に解かれる。

ここでは、図-1の円柱座標 (r, θ, z) で表わされる厚さ $2H$ 、半径 R の厚肉円盤を考え、その表面自由境界の中央に対称な衝撃荷重を負荷した場合を扱う。これは図-2の剛体滑面上の厚肉円盤問題と等価である。Voigt体の運動方程式は、Lamé定数 (λ, μ) で表わされた弾性体の運動方程式の λ, μ をそれぞれ、 $(\lambda + \lambda' \partial/\partial t), (\mu + \mu' \partial/\partial t)$ と置き換えたものに相当する。ただし、 λ', μ' は粘性係数、 t は時間である。次の無次元量 $\xi = r/R$ ($0 \leq \xi \leq 1$)、 $\eta = z/H$ ($0 \leq \eta \leq 1$)、 $\tau = c_2 t/H$ ($0 < \tau$) を導入すると軸対称Voigt体の運動方程式は次式で表わされる。

$$(1 + \xi \frac{\partial}{\partial \tau}) [v^2 u_r - \kappa^2 \frac{u_r}{\xi^2} + \kappa(1+b) \frac{\partial e}{\partial \xi}] = \frac{\partial^2 u_r}{\partial \tau^2}, \quad (1 + \xi \frac{\partial}{\partial \tau}) [v^2 u_z + (1+b) \frac{\partial e}{\partial \eta}] = \frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau^2} \quad (1)$$

ここで、 $b = \lambda/\mu$, $\xi = \epsilon c_2/H$, $\kappa = H/R$ であり、 c_2 は横波の伝播速度、 u_r, u_z はそれぞれ、 r, z 方向の変位、 ϵ は粘性係数($\epsilon = \lambda'/\lambda = \mu'/\mu$)である。また、 v^2, e は次式による。

$$v^2 = \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \kappa^2 \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad e = \kappa \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + \kappa \frac{u_r}{\xi} + \frac{\partial u_z}{\partial \eta} \quad (2)$$

この系に対する境界条件および初期条件は次式で表わされる。

$$\xi = 1 : u_z = 0, \quad \eta = \pm 1 : \sigma_{zz} = -p(\xi, \tau), \quad \sigma_{zr} = 0 \quad (3)$$

$$\tau = 0 : u_r = u_z = \frac{\partial u_r}{\partial \tau} = \frac{\partial u_z}{\partial \tau} = 0 \quad (4)$$

ここで、 $p(\xi, \tau)$ は分布直荷重、 σ_{zz}, σ_{zr} は直応力、せん断応力を表わす。

$$\sigma_{zz} = \frac{\mu}{H} (1 + \xi \frac{\partial}{\partial \tau}) (be + 2 \frac{\partial u_z}{\partial \eta}), \quad \sigma_{zr} = \frac{\mu}{H} (1 + \xi \frac{\partial}{\partial \tau}) (\kappa \frac{\partial u_z}{\partial \xi} + \frac{\partial u_r}{\partial \eta}) \quad (5)$$

式(1)の解を次の級数で表わすことにする。

$$u_r(\xi, \eta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} U_m(\eta, \tau) \phi_m(\xi), \quad u_z(\xi, \eta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(\eta, \tau) \phi_m(\xi) \quad (6)$$

ただし、 U_m, W_m, ϕ_m, ψ_m は任意未知関数である。式(6)を式(1)へ代入し、1次、0次のBesselの微分方程式

$$\frac{d^2 \phi_m}{d \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d \phi_m}{d \xi} + (\gamma_m^2 - \frac{1}{\xi^2}) \phi_m = 0, \quad \frac{d^2 \psi_m}{d \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d \psi_m}{d \xi} + \gamma_m^2 \psi_m = 0 \quad (7)$$

を条件として用いると ϕ_m, ψ_m は分離され、 $\phi_m = D_m J_1(\gamma_m \xi)$, $\psi_m = D_m J_0(\gamma_m \xi)$ と表わされる。ここで、 D_m, γ_m は任意定数で $J_k(\gamma_m \xi)$ は k 次の第1種Bessel関数である。境界条件を考慮すると γ_m は次式の根をとる。

$$J_0(\gamma_m) = 0 \quad (8)$$

また、式(1)の微分方程式は次のようになる。

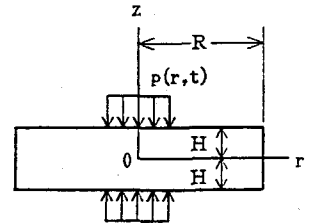


図-1 対称厚肉円盤

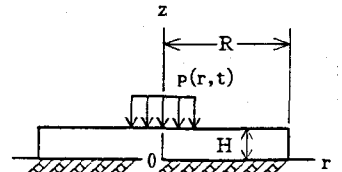


図-2 剛体滑面上の厚肉円盤

$$\left. \begin{aligned} (1+\zeta \frac{\partial}{\partial \tau}) \left[\frac{\partial^2 U_m}{\partial \eta^2} - \kappa^2 (2+b) \gamma_m^2 U_m - \kappa (1+b) \gamma_m \frac{\partial W_m}{\partial \eta} \right] &= \frac{\partial^2 U_m}{\partial \tau^2} \\ (1+\zeta \frac{\partial}{\partial \tau}) \left[(2+b) \frac{\partial^2 W_m}{\partial \eta^2} - \kappa^2 \gamma_m^2 W_m + \kappa (1+b) \gamma_m \frac{\partial U_m}{\partial \eta} \right] &= \frac{\partial^2 W_m}{\partial \tau^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

次に、Stokes法で解くために U_m, W_m を次の級数と仮定する。

$$U_m(\eta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}(\tau) \Phi_{mn}(\eta), \quad W_m(\eta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}(\tau) \Psi_{mn}(\eta) \quad (10)$$

ここで、 A_{mn} は U_m, W_m に共通な時間 τ に関する任意関数である。また、 Φ_{mn}, Ψ_{mn} は変位関数を表わすもので次の微分方程式を満足する。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{mn}'' - \kappa^2 (2+b) \gamma_m^2 \Phi_{mn} - \kappa (1+b) \gamma_m \Phi_{mn}' &= -\omega_{mn}^2 \Phi_{mn} \\ (2+b) \Psi_{mn}'' - \kappa^2 \gamma_m^2 \Psi_{mn} + \kappa (1+b) \gamma_m \Psi_{mn}' &= -\omega_{mn}^2 \Psi_{mn} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ただし、 ω_{mn} は任意定数で、プライムは η についての1階微分を表わす。式(11)に対する境界条件は式(3)を考慮して次式で与えられる。

$$\eta = \pm 1: (2+b) \Psi_{mn}' + b \kappa \gamma_m \Phi_{mn} = 0, \quad \Phi_{mn}' - \kappa \gamma_m \Psi_{mn} = 0 \quad (12)$$

式(11)は式(12)の境界条件に対して、次の直交性の条件を満足する。

$$\int_{-1}^1 (\Phi_{mn} \Phi_{ml} + \Psi_{mn} \Psi_{ml}) d\eta = 0, \quad \omega_{mn} \neq \omega_{ml} \quad (13)$$

この条件を用いて式(8)を Φ_{mn}, Ψ_{mn} によって展開し、式(3)、式(12)の境界条件で解けば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \omega_{mn}^2 (A_{mn} + \zeta \dot{A}_{mn}) + \ddot{A}_{mn} &= -G_{mn}(\tau), \\ G_{mn}(\tau) &= -\frac{H}{\mu} q_m(\tau) \frac{1}{f_{mn}} [\Psi_{mn}(1) - \Psi_{mn}(-1)] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{mn} &= \int_{-1}^1 (\Phi_{mn}^2 + \Psi_{mn}^2) d\eta, \\ q_m(\tau) &= \frac{2}{[J_1(\gamma_m)]^2} \int_0^1 P(\xi', \tau) \xi' J_0(\gamma_m \xi') d\xi' \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここで、ドットは時間についての1階微分を表わす。式(14)は式(4)から $A_{mn} = \dot{A}_{mn} = 0$ の初期条件によって解かれ A_{mn} は決定される。一方、 Φ_{mn}, Ψ_{mn} は式(11)の連立方程式を式(12)の条件のもとで解けば得られるが、これらは式(8)の根に依存する固有値方程式の根 ω_{mn} をとることになる。

図-3, 4は、 $b=1.0, \kappa=0.25$ とし、ステップ型衝撃集中荷重 $P(\tau)=0 (\tau=0), P_0 (\tau>0)$ を負荷した場合の応力波の伝播経路と応力 σ_{zz}, σ_{zr} の応答を示したものである。注目点は $(\xi_0, \eta) = (0.5, 0.5)$ とした。ただし、 $\xi_0 = \xi/\kappa$ である。実線は弾性体($\zeta=0$)、破線はVoigt体($\zeta=0.001$)の挙動である。Voigt体では緩慢な挙動となり、弾性体の運動の中心軸上を通る形態となる。経路Aを通り $\tau_L=0.408$ に縦波が到達し、続いて $\tau_T=0.707$ に横波が到達する。応力波は $\eta=0$ 面に到達すると反射を生ずる。経路Bを通り縦波の反射波が到達する時刻は $\tau_{LL}=0.913$ 、横波の反射波が到達するのは $\tau_{TT}=1.581$ である。経路Cは $\eta=0$ 面で反射した縦波が、更に表面自由境界で反射して注目点に到達する場合で到達時刻は $\tau_{LLL}=1.472$ である。

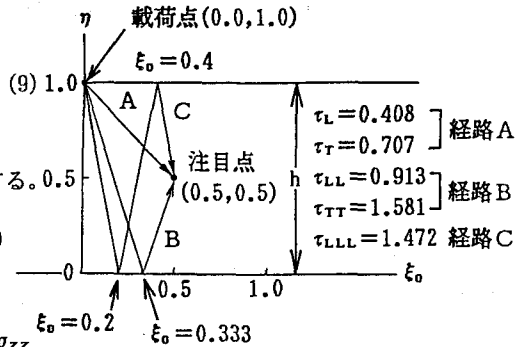


図-3 応力波の伝播経路

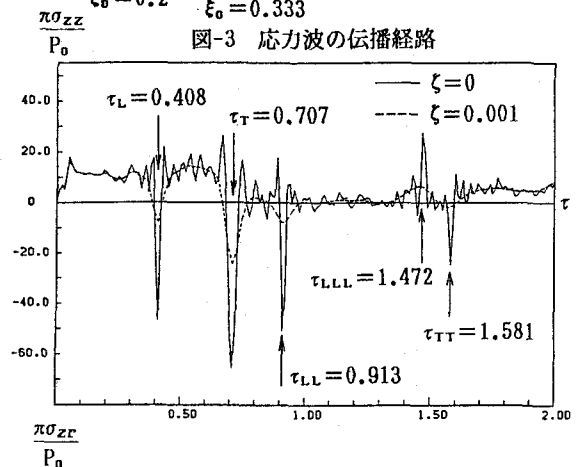


図-4 応力 σ_{zz}, σ_{zr} の応答