I－4

熱衝撃を受ける軸対称無限層体の過渡応力波伝播

信州大学　正　員 ○石 川　清　志
信州大学　学生員　赤 堀　　裕
信州大学　正　員　夏 目　正太郎

はじめに

本研究の目的は、層体の表面の一部が熱媒体によって急激にさらされた場合、その内部に誘発する波動の力学的特性を調べることである。ここでは、問題の解法を簡単化するために、非連成熱弾性問題とする。すなわち、エネルギー方程式における変形によって生じる熱の項を無視したものである。この場合、温度場は歪場から独立となり、物体内の温度変化は非定常熱伝導方程式を境界条件、初期条件で解くことにより得られる。温度場が既知となると、歪場では、運動方程式を境界条件、初期条件で解くことにより、変位、応力は得られる。この場合、温度の影響は単に温度荷重として扱われる。ここでは、ポテンシャル理論や、時間変数消去の積分変換を用いずに、非定常熱伝導方程式、あるいは連立偏微分方程式となる運動方程式(Navierの式)が境界条件、初期条件で直接的に解かれる一解析法をあわせて提示する。層体は粘性減衰を有するVoigt型線形粘弾性体とする。解析の特徴は、空間の1変数消去にはHankel積分変換を用いるものの、Stokesの方法による変数分離法の固有関数を誘導し、その関数の直交条件を利用することによって、非定常熱伝導方程式、あるいは運動方程式が空間と時間の方程式に分離された式形で展開され、それぞれ境界条件、初期条件で解かれる。固有関数そのものは自由振動に現れる正規関数であり、良く知られた関係が利用できる。Stokesの方法は、非定常熱伝導方程式の解析には無論、時間の1階微分演算子が含まれたVoigt体の運動方程式にも有効であって、すべて実数解析の範囲で問題が解決される。

基礎方程式

系は円柱座標(r, z)で表わされる厚さ2Hの無限層体とし、座標原点はその中心に取る。層体の自由表面(z=±H)では周囲熱媒体T_s(r, t)に接触し、z=0面で対称な問題とする。なお、tは時間である。いま、無次元円柱座標(ξ, η)と無次元時間τを用いれば、非定常熱伝導方程式、およびVoigt体の運動方程式、並びにそれらに対する境界条件、初期条件はそれぞれ次のように表わされる。

温度場：
$$\kappa\nabla^2 T=\frac{\partial T}{\partial\tau},\qquad \frac{\partial T}{\partial\eta}\pm h[T-T_s(\xi,\tau)]=0 \text{ on } \eta=\pm1,\qquad T=0 \text{ at } \tau=0 \tag{1}$$

歪場：
$$\left.\begin{aligned}&(1+\zeta\frac{\partial}{\partial\tau})[\nabla^2 u_r-\frac{u_r}{\xi^2}+(1+b)\frac{\partial e}{\partial\xi}]-\beta_t\frac{\partial T}{\partial\xi}=\frac{\partial^2 u_r}{\partial\tau^2}\\&(1+\zeta\frac{\partial}{\partial\tau})[\nabla^2 u_z+(1+b)\frac{\partial e}{\partial\eta}]-\beta_t\frac{\partial T}{\partial\eta}=\frac{\partial^2 u_z}{\partial\tau^2}\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned}&\sigma_{zz}=\sigma_{zr}=0 \text{ on } \eta=\pm1\\&u_r=u_z=\frac{\partial u_r}{\partial\tau}=\frac{\partial u_z}{\partial\tau}=0 \text{ at } \tau=0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ただし、無限($\xi\to\infty$)での条件は温度、熱、変位、応力がゼロとする。ここで、T(ξ,η,τ)は温度、κは無次元熱伝導率、hは熱伝達率、$b=\lambda/\mu$、$\nabla^2=\partial^2/\partial\xi^2+\partial/\xi\partial\xi+\partial^2/\partial\eta^2$、$e=\partial u_r/\partial\xi+u_r/\xi+\partial u_z/\partial\eta$、$u_r(\xi,\eta,\tau)$, $u_z(\xi,\eta,\tau)$はξ, η方向の変位、$\sigma_{zz}(\xi,\eta,\tau)$, $\sigma_{zr}(\xi,\eta,\tau)$は応力、$\lambda$, μはLamé定数、ζは粘性係数、β_tは熱弾性係数、$\xi=r/H(0<\xi<\infty)$、$\eta=z/H(-1<\eta<1)$、$\tau=c_T t/H(0<\infty)$である。なお、c_Tは横波伝播速度$c_T=(\mu/\rho)^{1/2}$である。ζは体積膨張率の速度係数と、直歪、剪断歪の速度係数を等しいと仮定した場合のものである。

数値計算例

上記の問題はη=0面で対称であるから、剛体滑面上の厚さHの層体($u_z=\sigma_{zr}=0$ on $\eta=0$, $\sigma_{zz}=\sigma_{zr}=0$ on $\eta=1$)の

表面に熱媒体が接した問題と等価である。従って、(0<ξ<∞, 0<η<1)の領域について論じる。 図-1は、図-2に示すような、表面の原点(ξ=0, η=1)に点熱源が負荷されたとき、層体内の点(ξ=0.5, η=0.5)に注目したT、σ_{zz}、u_zの時間変化を表わしたものである。 ただし、この結果はζ=0とした弾性体の場合である。熱媒体に対する点熱源の関係は

$$T_s(\xi,\ \tau)=\begin{cases} T_0(\tau),\ \xi=0 \\ 0,\qquad 0<\xi \end{cases} \tag{3}$$

で定義し、$T_0(\tau)$には次の関数形を与える。

$$T_0(\tau)=T_0[1-\exp(-\tau/\tau_0)] \tag{4}$$

ここで、τ_0は急速加熱、あるいは緩慢加熱を表わす係数で、τ_0=0, 0.1, 0.5 に対する$T_0(\tau)$の形態は図-3のようになる。τ_0=0の場合は典型的なステップ型衝撃荷重を表わす。図-1の記号τ_L, τ_T, …, τ_{LLL}は波面が注目点に到達した時刻であり、これらの近傍で応力、変位の急変が起る。τ_0=0の場合が最も顕著な衝撃性を表わす挙動に対し、τ_0が大きくなるに従って振幅は減少し、その挙動は緩慢になる。τ_Lは点源から誘発した半円球状の先行縦波伝播速度を持つ波面が直接注目点に到達したもので、その到達時刻はτ_L=0.408である。τ_Tは後行横波の直接到達時刻τ_T=0.707である。τ_{LL}、τ_{TT}は点源から誘発した縦波、横波がη=0面で反射し、 反射縦波、反射横波として注目点に到達した時刻で、それぞれτ_{LL}=0.913、τ_{TT}=1.581である。すなわち、これらは図-2の経路Bを通って到達したもので、その反射点はξ=0.333である。τ_{LLL}は2回反射の経路C全てを縦波の速度で通過し到達したもので、その到達時刻はτ_{LLL}=1.472である。上記の反射点は幾何学的に求められる。 τ_{TL}は点源から誘発した横波が伝播し、 η=0面で反射することによって新たに縦波を誘発し、反射縦波として注目点に到達した時刻τ_{TL}=1.353で、 いわゆる横波の回折効果を表わしたものである。 この場合の経路はEであり、この反射点はSnellの法則から得られたものでξ=0.259となる。しかし、τ_{TL}付近では際立った衝撃性が現れない。 上記の結果はb=1, κ=0.1, h=10としたものである。

粘性減衰を有するVoigt体の挙動は当日発表する。

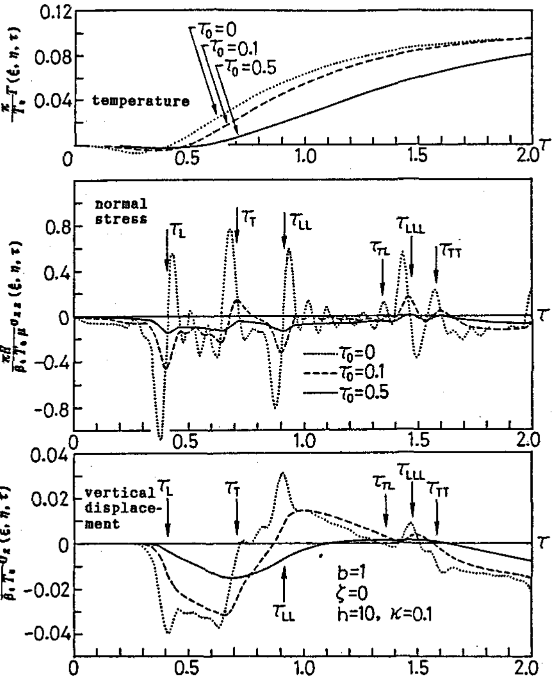

図-1 温度、応力、変位の応答

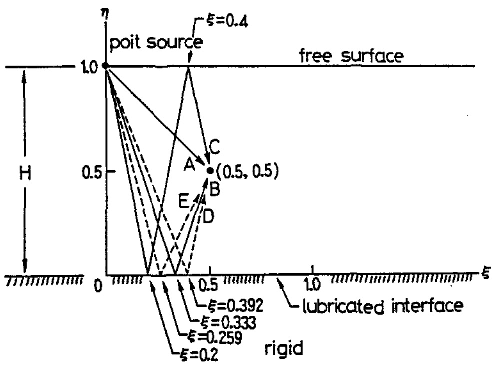

図-2 波動の経路、及びその反射点

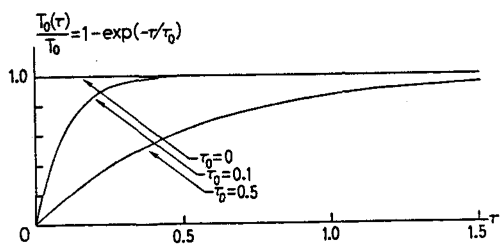

図-3 点熱源の時間変化