

散乱波動の一位相解析手法

東海大学海洋学部 学生員 ○五月女晃久

東海大学海洋学部 学生員 飯田 光男

東海大学海洋学部 正 員 北原 道弘

1. はじめに

欠陥評価に関する多くの波動実験及び解析において、欠陥の種類（形状）が異なれば、この欠陥による散乱波動の位相に「ずれ」が生じることは、誰もがすでに認識済みの事と思われる。また、実験値と解析値を比較する場合、信頼し得る量は、振幅値より位相である場合が多い。この波動の位相情報は、欠陥の定量化のために、より積極的に取り入れられてよいものと思われる。

本報告では、散乱場の遠方表現と境界要素法を組合わせた、位相の定量化策について考える。遠方散乱場の位相に対する積分表現を具体的に書き下すと共に、この位相を用いた散乱体の形状決定問題の一例を示す。

2. 問題の設定

スカラー波動場 u の散乱問題は、次の Helmholtz 方程式に支配される。

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{in } D \quad (1)$$

ここに、 $k = \omega/c$ は波数、 ω は角振動数、 c は波の速度である。全波動場 u は次のように表される。

$$u = u^I + u^S \quad (2)$$

上式において、 u^I は平面入射波、 u^S は散乱波を意味する (Fig.1)。

波動 u に対する積分表現は、次のように書ける。

$$u(\mathbf{x}) = \int_S U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} ds_y - \int_S \frac{\partial U(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} u(\mathbf{y}) ds_y + u^I(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in D \quad (3)$$

ここで、 U は基本解である、3次元 Helmholtz 方程式 (1) に対しては、次のように与えられる。

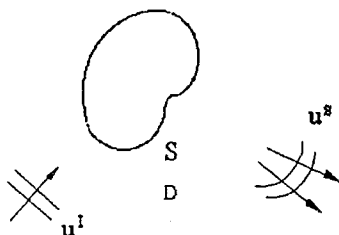


Fig.1 Scattering problem

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \quad (4)$$

ここに、 $R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ である。この基本解は時間因子 $\exp(-i\omega t)$ に対し、外向きの波を表している。

3. 遠方条件と散乱断面積

入射波を、Fig.2 に示す様に、 x_3 軸方向に進む平面波とする。

$$u^I(\mathbf{x}) = e^{ikx_3} \quad (5)$$

いま、散乱体は x_3 軸に対して回転対称であると仮定する。このとき、遠方において、波動 u は次の様に表される。

$$u(\mathbf{x}) = u^I + u^S \sim e^{ikx_3} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (6)$$

極座標 (r, θ, φ) の原点は散乱体の中心に位置しているものとする (Fig.2)。式 (6) の $f(\theta)$ は散乱振幅であり、 θ は x_3 軸から計った散乱角である。もし、散乱体が x_3 軸に関して回転対称でないならば、式 (6) において、 $f(\theta)$ の代わりに $f(\theta, \varphi)$ と置く必要がある。散乱振幅 $f(\theta)$ と散乱微分断面積 $\sigma(\theta)$ には、次の関係がある。

$$\sigma(\theta) d\Omega = |f(\theta)|^2 d\Omega \quad (7)$$

ここで、 $d\Omega$ は立体角である。微分断面積 $\sigma(\theta)$ は単位面積、単位時間当りの、散乱波の入射波に対する平均エネルギーの比である。散乱振幅 $f(\theta)$ と散乱微分断面積 $\sigma(\theta)$ は、遠方散乱場を介して、散乱体（散乱体表面の形状と境界条件）に関係している。散乱振幅 $f(\theta)$ が分かれば、式 (7) により $\sigma(\theta)$ を知る事が出来る。また、その逆も成り立つ。

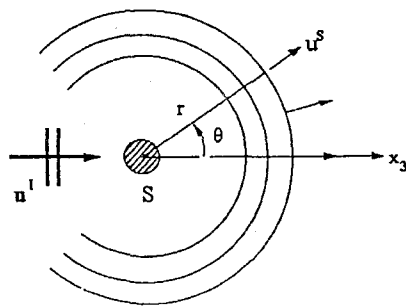


Fig.2 Scattered far-field

4. 散乱振幅と散乱断面積のより具体的関係

式(6)における散乱振幅 $f(\theta)$ を Legendre 関数 $P_l(\cos\theta)$ により, 次のように展開する.

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2i} a_l P_l(\cos\theta) \quad (8)$$

ここで, a_l は未知係数である. 入射波 (5) も, 同様に, 遠方で次のように表現できる.

$$e^{ikx_3} = e^{ikr \cos\theta} \sim \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{2ikr} \{e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}\} P_l(\cos\theta) \quad (9)$$

上式 (8), (9) を全波動場の表現 (6) に代入し, 次式を得る.

$$u(\mathbf{x}) \sim \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2ikr} \{(1+a_l)e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}\} P_l(\cos\theta) \quad (10)$$

このとき, 式 (7) と (8) より微分断面積は次のように書ける.

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2i} a_l P_l(\cos\theta) \right|^2 \quad (11)$$

5. 位相シフト

さて, 散乱振幅の係数 a_l に対し, エネルギー保存則は, 全波動エネルギーが入射波のエネルギーに等しいことを要求する.

$$|1 + a_l| = 1 \quad (12)$$

これより, 散乱振幅の係数 a_l を次のように置くことができる.

$$1 + a_l = e^{2i\delta_l} \quad (13)$$

式 (13), (10) および (6), また式 (13) および (11) より, 散乱振幅, 微分断面積に関し次の表現を得る.

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [e^{2i\delta_l} - 1] P_l(\cos\theta) \quad (14)$$

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [e^{2i\delta_l} - 1] P_l(\cos\theta) \right|^2 \quad (15)$$

上式 (14), (15) において, $f(\theta)$, $\sigma(\theta)$ は, 今, 未知量 $\delta_l (l=1, 2, \dots)$ により表現された. この δ_l を決定することが残されているが, まず, この δ_l の意味について考えておく.

式 (10), (13) より波動 u の遠方表現は次のようになる.

$$u(\mathbf{x}) \sim \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{kr} e^{i\delta_l} e^{i\pi/2} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) P_l(\cos\theta) \quad (16)$$

また, 入射波 (9) は次のように書ける.

$$u^I(\mathbf{x}) = e^{ikx_3} \sim \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{kr} e^{i\pi/2} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) P_l(\cos\theta) \quad (17)$$

両者を比べると, δ_l が波動の位相シフトを表していることがわかる.

6. 位相シフトの決定

積分表現 (3) は領域 D 内の任意の点 $\mathbf{x}$ について成立している. この式 (3) の遠方場 ($r \rightarrow \infty$) における表現を作り, 基本解 U の球 Bessel 関数表現を用いて, 位相シフト δ_l に対する次の積分表現を得る.

$$e^{2i\delta_l} - 1 = -(-i)^{l+1} \frac{k}{2\pi} \int_S \left\{ \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{y}}} + ikK(\mathbf{y})u(\mathbf{y}) \right\} \times j_l(ka) P_l(\cos\theta) dS_{\mathbf{y}}, \quad (l=0, 1, 2, \dots) \quad (18)$$

ここに,

$$K(\mathbf{y}) = \left\{ 1 + \frac{i}{kr} \left(1 + \frac{a \cos \chi}{r} \right) \right\} \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{y}) \quad (19)$$

である. 境界上の $u(\mathbf{y})$ と $\partial u(\mathbf{y})/\partial n$ がわかれば, 位相シフト $\delta_l (l=0, 1, 2, \dots)$ を式 (18) より決定することが出来る. 式 (18) の右辺の境界上の物理量は, 散乱体表面で規定された境界条件に対する通常の積分方程式を解くことにより決定される.

7. 応用例

逆散乱問題への位相シフトの応用を Fig.3 に示す. この図は, 無次元化波数 $ak = 0.1$ の場合の球形散乱体に対する δ_l を用いて, 式 (18) より散乱体形状を再構成した結果である.

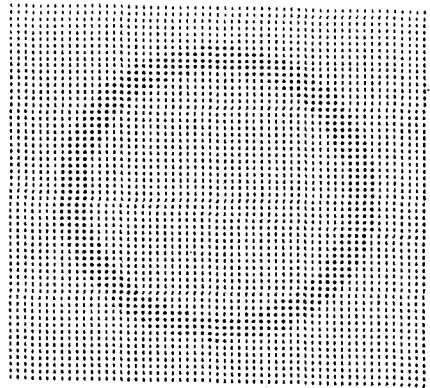


Fig.3 Reconstruction of spherical boundary