

亀裂の進展による梁の曲げ破壊機構を説明する数学的モデルの研究

岐阜大学工学部 ○学生会員 横井 健二

岐阜大学工学部 正会員 藤井 康寿

岐阜大学工学部 正会員 中川 建治

1. まえがき

コンクリート等の梁の曲げ破壊実験に関して毎年多くの研究が報告されている。本研究は、梁の曲げ破壊の時のクラック周辺の応力分布と変位分布の挙動に関して一つの数学的モデルを想定して耐力と変形の関係を書いて実験結果¹⁾と比較しているのが特徴である。

本研究では、図-1に示すような曲げのモデルを設定して各荷重状態のクラック周辺の応力分布と変位分布をすべて弾性論に基づいて導いているが、開口のくいちがいを構成する複素関数と、重み付き積分法によってクラック先端部分に有限な応力集中を生じさせる手法を用いて、弾性体という仮定でありながら荷重-変位の関係を近似的に実現することが可能となる。

2. 基本的な関数

応力関数

$$\nabla^2 \nabla^2 F(x, y) = 0, \quad Z = x + iy, \quad \bar{Z} = x - iy$$

$$F(Z) = \bar{Z} \phi(Z) + \psi(Z)$$

$$2G(u + iv) = \kappa \phi(Z) - Z \phi'(Z) - \bar{\psi}'(Z)$$

境界条件

$$x \text{ 軸上で } \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

$$y \text{ 軸上で } \sigma_x \neq 0 \quad (0 < y < a)$$

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0 \quad (a < y)$$

応力関数は次のようになる。

$$\phi = \sigma_0 \{-2a^2 \log(z + \sqrt{z^2 + a^2})\} / 4$$

$$\psi = \sigma_0 \{2\sqrt{z^2 + a^2}\} / 4$$

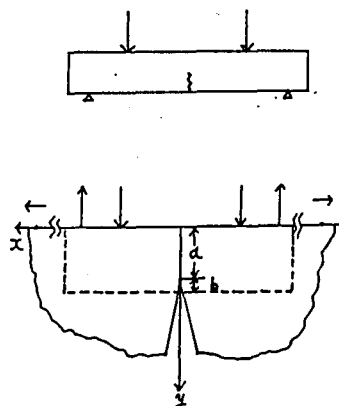


図-1

これはWestergaardの引張りクラックの解であるが虚数部は曲げクラックの解となるので、虚数部を活用する。また、これは $x = \pm a$ で無限大の応力集中を与える解であるが、重み付き積分法で区間の長さ a で重み積分すれば有限な応力集中に変換できる。このような応力関数の特徴は応力も開口変位も共に存在する区間（プロセスゾーンに相当）を形成できるという点である。

3. 解析モデル

梁の曲げ破壊時の近似的なモデルとして図-1の点線で示した部分を想定する。最初は亀裂が生じていないので応力と変位はフックの法則による弾性係数の比で増加していくが、応力は破壊強度 σ_{ys} に達すると亀裂が入りはじめて耐力は負の勾配で急に減少する。そして亀裂が徐々に進行していき最後に破断する。いずれの段階でも応力集中の最大値は $\sigma_{max} = \sigma_{ys}$ 一定であり、クラック面の応力の総和は0とする。

図-1に示すような亀裂を持つ半無限板の① σ_x ② σ_y ③ τ_{xy} を図-2に示す。図-2の状態では本来なら x 軸上にせん断力は発生しないはずであるが、図-2-③ではせん断力発生しているのでクラックを持たない半無限板の自由辺 x 軸上でせん断力を作用させているような解を加え合わせる必要がある。この τ_{xy} 補正用の応力関数（複素局面）を図-3に示した。次に同じく亀裂を持たない半無限板に水平方向と鉛直方向の一对の集中荷重を作用させる場合の応力と変位の複素曲面を導き、これらの応力や変位状態を表す各複素曲面に係数を掛け、加え合わせることによって、図-1の状態の応力分布と変位を実現することができる。

このような過程を基にして、 y 軸上の連続部分の長さ $a + b$ を次第に減少させつつクラックが徐々に進行していく時の荷重-変位の関係を図-4に示した。

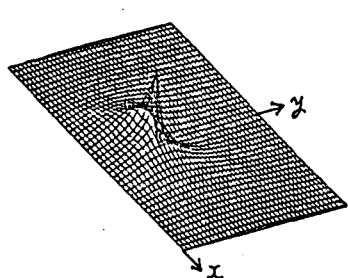
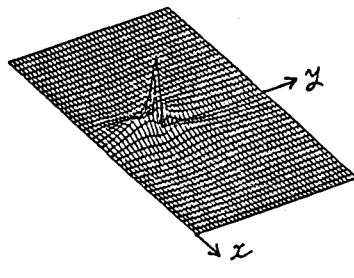
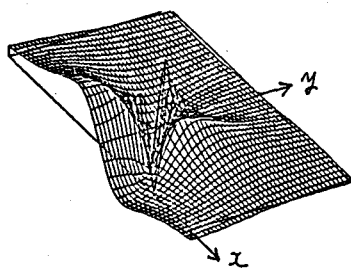
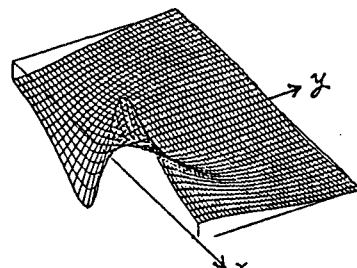
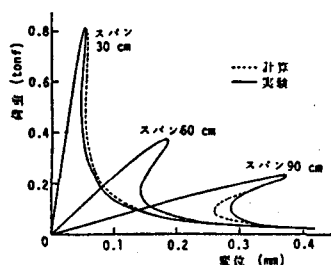
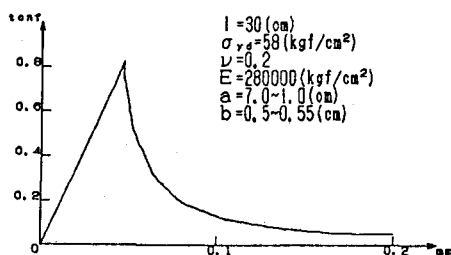
4. まとめ

1) 以前に引張りモデルによる研究が行われている。その研究では、荷重-変位曲線を現実的でよい近似では得られなかった。曲げのモデルでは図-4の解析結果のように荷重-変位曲線を近似的に実現することができた。

2) 従来混成材料の荷重-変位曲線を求めるにはほとんどFEM等の数値解析法が用いられている。本研究で提案した解析モデルは完全弾性解を用いながら材料の軟化特性と破壊過程を近似的に表現できる。数学モデルとしては簡便でありながら、いずれの場合でも開口変位と耐力の関係を有効的に追求できるのが特徴である。

＜参考文献＞

- 1) 小柳、六郷、内田：コンクリートの破壊現象の安定性とその計測、コンクリート工学論文No82. 6-1
- 2) 藤井、段、中川：有限部分で接合された2枚の半無限弾性板の接合部近傍の応力に関する研究、土木学会第43回年次学術講演会（昭和63年10月）
- 3) 段：クラック先端部分で有限な応力集中を構成する関数解に関する基礎的な研究、名古屋大学工学部学位申請論文

図-2-① σ_x 図-2-② σ_y 図-2-③ τ_{xy} 図-3 τ_{xy} 補正実験結果¹⁾

解析結果

図-4 P- δ 曲線