表面クラックの一解析法について

東海大学海洋学部　学生員　○中島　康普
同　　上　　　学生員　　間杉　　宏
東海大学海洋学部　正　員　　北原　道弘

1．はじめに

構造部材の表面に存在するクラックの傾きと深さを知ろうとする場合の１つの有力な手法は，超音波法であろう．超音波は弾性体内を伝播するとき，弾性波となる．ここでは，部材裏面に表面クラックが存在する場合を想定し，表面からの弾性波のピッチ・キャッチ法により，クラックからの後方散乱場を吟味することにより，表面クラックを特徴付けることを考える．このために，表面クラックによる波動の散乱問題を解析する一手法，ここでは積分方程式法を示し，解析例について述べる．

2．基本関係式

定常状態における２次元弾性体の運動方程式は次のように書ける．

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}+\rho\omega^2 u_\alpha=0,\quad \alpha,\beta=1,2 \tag{1}$$

また，応力と変位の関係式は次のようである．

$$\sigma_{\alpha\beta}=\lambda\delta_{\alpha\beta}u_{\gamma,\gamma}+\mu(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha}) \tag{2}$$

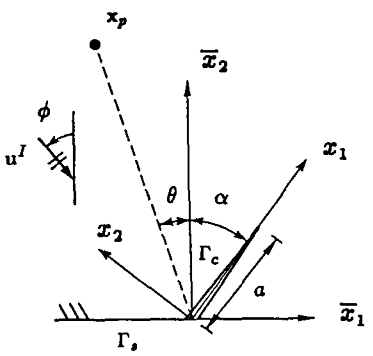


Fig.1 Crack configuration

半無限境界 Γ_s とクラックの上下面 $\Gamma_c^{\pm}$ では応力零とする．

$$t_\alpha=\sigma_{\alpha\beta}n_\beta=0,\quad x\in\Gamma\quad(\Gamma=\Gamma_s+\Gamma_c^{+}+\Gamma_c^{-}) \tag{3}$$

いま，全変位場 u_α を入射波 u_α^I と散乱波 u_α^{sc} の和として表すとき，

$$u_\alpha=u_\alpha^I+u_\alpha^{sc},\quad \sigma_{\alpha\beta}=\sigma_{\alpha\beta}^I+\sigma_{\alpha\beta}^{sc} \tag{4}$$

散乱波は無限遠で放射条件を，全変位場はクラック端の条件を満足するものとする．

3．積分方程式

Fig.1 に示すクラック座標 (x_1, x_2) において，散乱場の積分表現は次のようになる．

$$u_\gamma^{sc}(x_p)=\int_{\Gamma_S}\sigma_{\alpha\beta\gamma}^G(x;x_p)u_\alpha^{sc}n_\beta ds(x)+\int_0^a\sigma_{\alpha2\gamma}^G(x;x_p)\Delta u_\alpha(x)dx_1,\quad x_p\notin\Gamma \tag{5}$$

ここに，$\sigma_{\alpha\beta\gamma}^G$ はクラックのない無限体中の応力に関するグリーン関数であり，$\Delta u_\alpha=u_\alpha^+-u_\alpha^-$ はクラックの開口変位，a はクラックの長さである．上式 (5) と表面力の表現

$$t_\alpha^{sc}=\sigma_{\alpha\beta}^{sc}n_\beta|_{x_p} \tag{6}$$

より，表面力の積分表現を得る．

$$t_\alpha^{sc}(x_p)=-n_\beta(x_p)\left\{\int_{\Gamma_S}K_{\alpha\beta\delta\epsilon}^G(x;x_p)u_\delta^{sc}n_\epsilon ds+\int_0^a K_{\alpha\beta\delta2}^G(x;x_p)\Delta u_\delta(x)dx_1\right\},\quad x_p\notin\Gamma \tag{7}$$

ここに $K_{\alpha\beta\delta\epsilon}^G$ は次のようであり，微分は点 x に関する微分である．

$$K_{\alpha\beta\delta\epsilon}^G=\lambda\delta_{\alpha\beta}\sigma_{\delta\epsilon\gamma,\gamma}^G+\mu(\sigma_{\delta\epsilon\alpha,\beta}^G+\sigma_{\delta\epsilon\beta,\alpha}^G) \tag{8}$$

式 (7)で極限 $x_p \to x \in \Gamma$ を取り，境界条件 (3) を用いれば，解くべき積分方程式を得るが，このとき積分核は超特異核となる．そこで，ここでは極限を取る前に次の操作をする．式 (7)の表現において，半無限境界 Γ_s を N_1 個に，クラック表面 Γ_c を N_2 個に分割する．

$$t^{sc}_\alpha(x_p) = -n_\beta(x_p)\left\{\sum_{j=1}^{N_1}\int_{s_j}^{s_{j+1}} K^G_{\alpha\beta\delta\epsilon}(x;x_p)u^{sc}_\delta(X)n_\epsilon ds + \sum_{j=N_1+1}^{N}\int_{s_j}^{s_{j+1}} K^G_{\alpha\beta\delta 2}(x;x_p)\Delta u_\delta(x)dx_1\right\},\ x_p \notin \Gamma \tag{9}$$

このとき，$x_p \notin \Gamma$ に対し，上式の右辺第１項は次のように変形できる（第２項についても同様）．

$$\begin{aligned}\int_{S_j}^{S_{j+1}} K^G_{\alpha\beta\delta\epsilon}(x;x_p)u^{sc}_\delta(x)n_\epsilon ds &= H^1_{\alpha\beta\delta}(x;x_p)u^{sc}_\delta(x)\Big|_{s_j}^{s_{j+1}} \\ &- \int_{S_j}^{S_{j+1}} H^1_{\alpha\beta\delta}(x;x_p)\varepsilon_{\lambda\mu}u^{sc}_{\delta,\lambda}(x)n_\mu ds \\ &- \rho\omega^2\int_{S_j}^{S_{j+1}} H^2_{\alpha\beta\delta}(x;x_p)u^{sc}_\delta(x)ds\end{aligned} \tag{10}$$

ここに，$H^{1,2}_{\alpha\beta\delta}$は次のようであり，

$$\begin{aligned}H^1_{\alpha\beta\delta} &= \lambda\delta_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\epsilon}\sigma^G_{\delta\epsilon\gamma} + \mu(\varepsilon_{\beta\epsilon}\sigma^G_{\delta\epsilon\alpha} + \varepsilon_{\alpha\epsilon}\sigma^G_{\delta\epsilon\beta}) \\ H^2_{\alpha\beta\delta} &= \lambda\delta_{\alpha\beta}u^G_{\delta\gamma}n_\gamma + \mu(u^G_{\delta\alpha}n_\beta + u^G_{\delta\beta}n_\alpha)\end{aligned} \tag{11}$$

$\varepsilon_{\alpha\beta}$ は２次元の置換記号である．式(10)の表現において、特異要素上では極限を取る前に解的に積分を実行しておくことにする．この操作の後に，式 (9)で極限 $x_p \to x \in \Gamma$ を取り，
境界条件 (3)：

$$t^I_\alpha(x^i_p) + t^{sc}_\alpha(x^i_p) = 0,\quad x^i_p \in \Gamma,\quad i = 1, 2, \dots, N \tag{12}$$

を用いて，解くべき積分方程式を得る．なお，数値解析上，クラック端では次のクラック要素を導入している．

$$\Delta u_\delta = C_\delta(a - x_1)^{1/2} \tag{13}$$

4．散乱場の積分表現

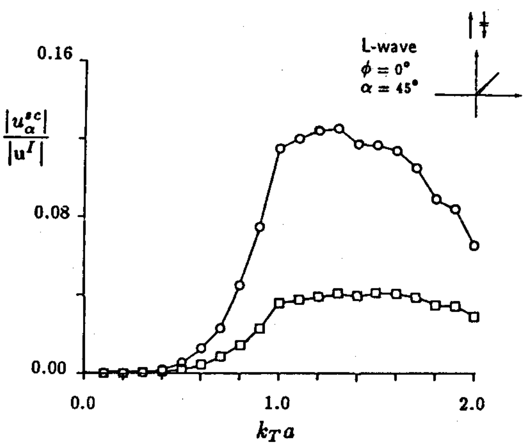
非破壊評価においては，一般にクラック端から遠い点での散乱場が必要となる．式 (5)の積分表現は実際上，半無限境界 Γ_s の取り方に依存するので，式(9)-(13)を用いて境界上の諸量を決めた後の散乱場の表現には，半無限境界 Γ_s 上の境界条件を満足する半無限体のグリーン関数 $\overline{\sigma}^G_{\alpha\beta\gamma}$ を用いることにする．

$$u^{sc}_\gamma(\overline{x}_p) = \int_{\Gamma_c^+} \overline{\sigma}^G_{\alpha\beta\gamma}(\overline{x};\overline{x}_p)\Delta u_\alpha(\overline{x})\overline{n}_\beta ds \tag{14}$$

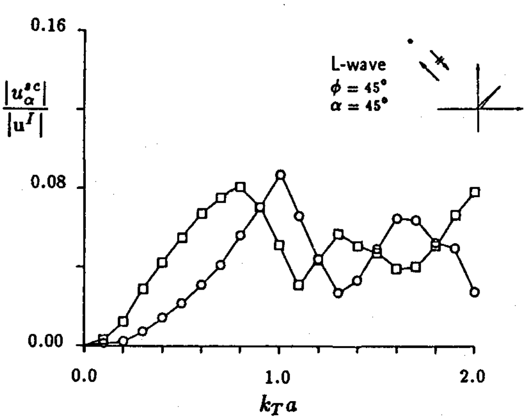
$\overline{\sigma}^G_{\alpha\beta\gamma}$ に関する詳細は省略する．

5．解析例

Fig.2 に，クラックの傾きが $\alpha = 45°$ である場合の後方散乱場の波数に対する挙動を示す． (a)が縦波の入射角 $\phi = 0°$ の場合， (b)が $\phi = 45°$ の場合である．



(a) $\phi = 0°$, $\alpha = 45°$



(b) $\phi = 45°$, $\alpha = 45°$

Fig.2 Backscattered displacements $|u^{sc}_\alpha|/|u^I_\alpha|$ vs. wavenumber $k_T a$ (○ : $|u^{sc}_1|/|u^I_\alpha|$, □ : $|u^{sc}_2|/|u^I_\alpha|$) for L-wave incidence.