

膜構造の自由振動解析について

大同工業大学 正会員 ○水澤 富作

オレゴン州立大学 J.W. Leonard

1 はじめに 膜構造はケーブルと共にTension構造¹⁾と呼ばれ、大型の利用空間を作り出すテントやドーム、飛行船、消波用及びエネルギー・備蓄用海洋構造物として広く用いられている。膜構造は、曲げや圧縮に抵抗する曲面構造と異なり、封じ込められた空気や流体による圧力により安定した構造形状が作り出される。また曲げ荷重により生じる応力を低減するために、ケーブルで補強される場合も多くみられる。膜構造では、その厚さが非常に薄く、曲げや圧縮剛性が無視され、面内引張り応力と面内せん断応力のみに抵抗する。特に、圧力の導入前と変形後でその形状がかなり異なり、また外力の作用によってもその形状が大きく変形する。このような膜構造の解析過程は、i)初期圧力の導入による初期つり合い形状を求める形状決定問題、ii)得られたつり合い形状での静的及び動的問題に分けられる。一方、膜の構造解析では、次のような非線形性を考慮しなければならない。(1)幾何学的非線形、(2)超弾性のような材料学的非線形、(3)導入される圧力による非線形外力(非保存力問題)、(4)圧縮応力による面内剛性の低下(Wrinke問題)が挙げられる。膜構造の静的問題は、古くから解析的手法や種々の数値解析法により解かれてきている。Rivlinら²⁾による弾性及び超弾性膜問題の解析的研究、また Odenらの三角形要素による研究³⁾、VermaとLeonardら³⁾によるSuper-parametric要素モデルを用いたシェル膜の解析が挙げられる。これらの研究では、高次の非線形方程式を解くために、Newton-Raphson法や増分・反復法が用いられている。著者らは、高次のIsoparametric要素とViscous relaxation法を用いて、シェル膜の静的非線形解析について検討している⁴⁾。シェル膜の曲げ剛性は小さく、また風荷重や波浪外力により大きな変形を伴うので、膜構造の自由振動特性を知ることが重要である。本研究では、膜構造の自由振動解析を行うために、3次元有限変位弾性理論、Total Lagrangian表現、Greenのひずみテンソル・Kirchhoffの応力テンソル及び仮想仕事の原理に基づき、任意形状の膜要素の非線形運動方程式を導いている。この非線形運動方程式の固有値解析のために、Viscous Relaxation法を用いて膜の初期つり合い形状を求め、等価接線剛性マトリックスを用いて固有値計算を行っている。本手法の有用性を示すために、2、3の平面膜やシェル膜を解き、解の精度や振動性状について検討している。

2 式の定式化 3次元有限変位弾性理論⁵⁾に基づき、膜要素の基礎方程式を導いている。ここで、次の解析仮定を設ける。(1) 膜の厚さは非常に薄く、曲げ剛性は無視する。(2) 面内引張り応力とせん断応力のみに抵抗し、面内圧縮応力には抵抗しない。(3) 変位とひずみの大きさには制限を設けない。(4) Total Lagrangian表現を用いる。(5) 超弾性材料も考慮する。(6) テンソル表現と曲線座標により定式化を行う。

2.1 等方性弾性材料の構成式 線形弾性材料の構成式は、 $\tau^{ab} = C^{abcd} \gamma_{cd} \dots (1)$ で与えられる。ただし、 $C^{abcd} = E \nu / (1 + \nu) / (1 - 2\nu) \alpha^{ab} \beta^{cd} + E/2 / (1 + \nu) (\alpha^{ac} \alpha^{bd} + \alpha^{ad} \alpha^{bc})$; $a, b, c, d = 1, 2$ である。 τ^{ab} はKirchhoffの応力テンソル、 γ^{cd} はGreenのひずみテンソルを示す。 E は弾性係数、 ν はPoisson比であり、 α^{ab} は共反計量テンソルを示す。一方、Mooney-Rivlin材のような超弾性材の応力テンソルは、ひずみエネルギー関数より、 $\tau^{ab} = 2\alpha^{ab} [C_1 + C_2(I_1 - \lambda^2)] + 2A\alpha^{ab} \{C_2A/\alpha - \lambda^2[C_1 + C_2(I_1 - \lambda^2)]\} \dots (2)$ で与えられる。ここで、 $\lambda = h_0/h$ は厚さの伸び比、 I_1, I_2 はひずみ変量であり、 C_1 と C_2 は実験により与えられる材料定数である。ただし、 $\alpha = \det |\alpha_{ab}|$, $A = \det |A_{ab}|$; $a, b = 1, 2$ である。

2.2 膜要素の運動方程式 座標関数と変位関数に同じ形状関数、 $M^i(\xi_1, \xi_2)$ を用いれば、 $X_i(\xi_1, \xi_2) = M^i(\xi_1, \xi_2) X_i^1$, $u_i(\xi_1, \xi_2) = M^i(\xi_1, \xi_2) u_i^1$; $i = 1, \dots, N \dots (3)$ で与えられる。ここで、 X^1, u^1 は、曲線座標系 (ξ_1, ξ_2) での要素の節点座標と変位を示す。 N は要素の節点数である。したがって、仮想仕事の原理より求められる要素の運動方程式は、次式で与えられる。

$$\int \int (1/2) \tau^{ab} (M^j_{,a} M^j_{,b} + M^j_{,a} M^j_{,b}) (X^j_i + u^j_i) h_0 \sqrt{a} d\xi_1 d\xi_2 + \int \int \rho_0 h_0 M^j_i u^j_i \sqrt{a} d\xi_1 d\xi_2 - \int \int \rho_0 b_{0,i} h_0 M^j_i \sqrt{a} d\xi_1 d\xi_2 - \int \int t_{0,i} M^j_i \sqrt{a} d\xi_1 d\xi_2 = 0; a, b = 1, 2, i = 1, 2, 3 \dots (4)$$

ここで、第1項は内力の仕事、第2項は慣性力の仕事であり、第3項及び4項は、それぞれ物体力($b_{0,i}$)と表面力($t_{0,i}$)による仕事である。 h_0 は初期厚さ、 ρ_0 は密度である。ただし、 $t_{0,i}$ は膜要素の変形後の形状(要素面積や方向)に依存する。ここで、膜要素の中央面に常に垂直に作用する圧力を、 $p = p(\xi_1, \xi_2)$ とすれば、 $t_{0,i} = \sqrt{(A/\alpha)} p (A_3 \cdot e_i) = 1/\sqrt{\alpha} p [(A_1 \times A_2) \cdot e_i]$; $i = 1, 2, 3 \dots (5)$ で与えられる。ただし、 e_i は直交座標系での単位ベクトル、 A_i は、曲線座標系での直交ベクトルである。

したがって、式(4)を全要素について重ね合わせれば、系の運動方程式が得られる。この式は、幾何学的非線形性、材料学的非線形性や非保存力を含む高次の非線形方程式になる。したがって、初期形状でこれをマトリックス表示すると、 $[M] \{u\} + [K_T] \{u\} = \{0\} \dots (6)$ で与えられる。ここで、 $[K_T]$ =等価接線剛性マトリックス、 $[M]$ =質量マトリックス、 $\{u\}$ =変位ベクトル、 $\{\ddot{u}\}$ =加速度ベクトルである。

2.3 膜の初期つり合形状解析⁴⁾ 高次の非線形性を示す形状決定問題をViscous Relaxation法を用いて解いている。この手法は^{6,7,8)}、仮想的な減衰項を全体剛性方程式に付加し、数値積分法とNewton-Raphson法を組合せた準動的解法である。すなわち、得られる接線剛性マトリックスを解く場合に問題を含むとき、これに仮想減衰マトリックスを付加することにより数値安定性を得ることができる。

Table 1. Comparison of natural frequencies of square membranes; $a=40.0$, $h_0=0.1$, $E=3E+7$, $\nu=0.3$, $\rho=7.5E-4$, $p=10.0$

FE models	Natural frequencies(rad/sec)				
	1st	2nd	3rd	4th	5th
4 Quadratic	40.78	65.83	65.83	107.5	109.1
9 Quadratic	40.59	64.76	64.76	82.98	91.65
16 Linear	41.61	69.75	69.75	89.44	108.9
25 Linear	41.23	67.75	67.75	86.49	102.6
Exact values	40.55	64.13	64.13	81.12	90.69

3 数値計算例及び考察 Table 1では、一様な張力, p を受ける正方形弾性膜の振動数を、4節点要素(Linear)と8節点要素(Quadratic)により計算し、その値を厳密解と比較している。これより、高次のアイソパラメトリック要素を用いれば、少ない要素数で精度の高い結果が示されている。Fig.1では、一様な内圧, p で膨らませられた超弾性材より成る半円筒膜の振動数が内圧を横軸にとり示してある。ここで、 $h_0=0.01ft$, $R=10.0ft$, $L=30.0ft$, $\rho=1.0$, $C1=2300psf$, $C2=280psf$ である。

これより、内圧の増大とともに、振動数が増大してくる。また、一様な内圧を受ける超弾性円筒膜の振動モードに与える内圧の影響について検討してみた。内圧の増大に伴い、4次モード以上において、長手方向のねじりモードとその逆対称モードの生じ方に変化が見られた。以上、本文では、アイソパラメトリック膜要素を用いた膜構造の自由振動解析を行い、その精度や振動特性について検討し、本手法の有用性について示した。今後、波浪中での膜構造の動的性状について検討して行きたい。なお、本研究は、科研費(海外学術研究)の援助を受けている。

参考文献 1) Leonard, J.W.:Tension Structures. McGraw-Hill,1987. 2)Oden, J.T.:Finite elements of nonlinear continua. Macgraw-Hill,1972. 3) Verma,V.K. and Leonard, J.W.:Nonlinear behavior of cable-reinforced membranes. ASCE,Vol. 104,EM4,1978. 4) 水沢他:膜構造の静的非線形解析。第44回土木学会年講,I-3,1989. 5) Green, A.E. et al:Large elastic deformations. Clarendon Press, 1954. 6) Webster,R.L.:On the static analysis of structures with strong geometric nonlinearity. Compt. Struct. vol. 11, 1980. 7) 水澤他:海洋環境下でのケーブルの自由振動解析。土木学会海洋開発論文集, Vol. 5, 1989. 8) 水澤他:海洋ケーブルの動的非線形挙動について。日本造船学会海洋工学シンポジウム論文集, vol.9, 1989.

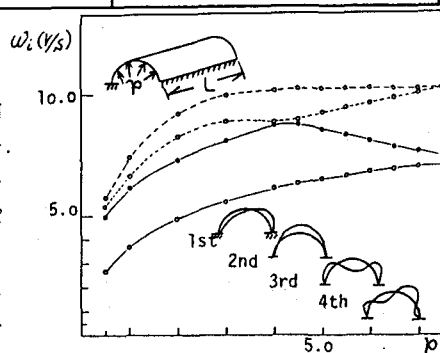


Fig. 1 Frequencies of hyperelastic semi-cylindrical membrane under different inner pressure, p