

マルコフ連鎖による土質柱状図の記述

名城大学理工学部 学生会員 ○山本忠久、子安正範
名城大学理工学部 正 会 員 板橋一雄

1. はじめに

基本的な土質調査法の一つにボーリング調査がある。この調査結果として土質柱状図が描かれるが、地盤の複雑さのために、隣接する地点でも異なる柱状図が得られることもある。こうした立場に、多数本の柱状図に基づいた地盤の複雑性の評価手法を考えたので報告する。まず始めに、マルコフ連鎖による柱状図の表現法とそれから得られる特性量を簡単に示すとともに、適合度検定の考え方を応用した柱状図の類似の程度の評価法を示す。そして、一地域の6本の柱状図を用い解析を行ったので、その結果を示す。

2. 推移確率行列による柱状図の表現と特性量^{1,2)}

柱状図にマルコフ連鎖の考え方を適用するためには、土質柱状図に現れる土質名の区分(状態空間)と土質を読み取る深度間隔 Δz (パラメータ空間)を事前に決定しておく必要がある。この2点のみを決めておけば、1本の柱状図は深度 Δz 間隔の土質状態の変化の連続(推移)により一意的に表現することができる。たとえば、(砂)→(粘土)→(砂)→(礫)→…。いま、土質名を s 種類に区分したとすれば、状態 i から状態 j への推移回数 n_{ij} は $(s \times s)$ の行列 N で表現できる。また、各行の行和を式(2)で

$$N = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \cdots & \textcircled{s} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \vdots \\ \textcircled{s} \end{matrix} & \begin{matrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1s} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{s1} & n_{s2} & \cdots & n_{ss} \end{matrix} \end{matrix} \quad \cdots (1) \quad \text{表せば、} \quad n_i = \sum_{j=1}^s n_{ij} \quad \cdots (2)$$

となる。そして、行列 N の各要素をその行和で割ることによって、1本の柱状図が式(3)の行列 P により一意的に表現される。

$$P = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \cdots & \textcircled{s} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \vdots \\ \textcircled{s} \end{matrix} & \begin{matrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{ss} \end{matrix} \end{matrix} \quad \cdots (3) \quad \text{ここに、} \quad p_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i} \quad \cdots (4)$$

この p_{ij} には $0 \leq p_{ij} \leq 1$ 、 $\sum_j p_{ij} = 1$ の性質があり、この行列 P は推移確率行列と呼ばれる。すなわち、1本の柱状図が s 行 s 列の確率行列で表現されたことになる。

いま、深度間隔 Δz で地層の状態を読み取るので、深度 $(n \times \Delta z)$ 、 $n = 0, 1, 2, \dots$ で状態が i となる確率を $q_i(n)$ とし、式(5)で表せば、それをベクトルの形に並べた式(6)は深度 $(n \times \Delta z)$ における状態確率分布を表すことになる。

$$q_i(n) = \text{Prob}\{X_n = i\} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \cdots (5)$$

$$\pi(n) = \{q_1(n), q_2(n), \dots, q_s(n)\} \quad \cdots (6)$$

また、深度0(地表面)の状態確率分布は初期分布 $\pi(0)$ と呼ばれる。

この初期分布 $\pi(0)$ と推移確率行列 P が与えられると、マルコフ連鎖の特性を用いれば、深度 $(n \times \Delta z)$ での地層の状態確率が次式で計算できる。

$$\pi(n) = \pi(0) \times P^n = \pi(n-1) \times P \quad \cdots (7)$$

更に、 $n \rightarrow \infty$ とした時の $\pi(\infty)$ は極限分布と呼ばれるが、土質の構成割合を示している。また、礫層のような支持層が最下層にのみ現れる柱状図については、礫層が吸収状態となり、吸収的マルコフ連鎖の特性が応用でき、支持層が現れる期待深度やその間の土質の構成割合が推定できる。

以上の関係は、既存資料などにに基づき調査地域を代表する推移確率行列 P が事前に与えられておれば、地表面の土質状態を見ただけで、深いところの土質状態が確率的にわかることを意味している¹⁾。

3. 推移確率行列による柱状図の比較

マルコフ連鎖に対する仮説検定の考え方を応用すれば、2本の柱状図の類似の程度を評価することができる。観測された柱状図の実測値（その推移確率行列： P ）がある与えられた推移確率行列 P^0 のマルコフ連鎖から生じるかどうか？を知ることは、帰無仮説 $H_0: P = P^0$ の仮説検定問題となることが知られている。すなわち、比較の基準となる柱状図の推移確率行列を P^0 とし、比較したい柱状図のそれを P とすれば、式（8）で計算される値は自由度 $[s(s-1)-d]$ のカイ2乗分布に従うことが知られている。²⁾

$$X^2 = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{n_i (P_{ij} - P_{ij}^0)^2}{P_{ij}^0} \quad \dots (8)$$

ここに、 P_{ij}^0 と P_{ij} はそれぞれ基準となる柱状図ならびに比較したい柱状図の推移確率行列の (i, j) 要素、 n_i は比較したい柱状図の推移回数の行和である。また、自由度の計算式の中にある d は基準の推移確率行列 P^0 のゼロ要素数を示す。そして、式（8）で計算された X^2 値が小さければ、ふたつの柱状図は類似しており、 X^2 値が大きければ類似の程度が低いことを示す。

4. 解析事例

ここでは、解析事例の一例として、濃尾平野東部の日光川河口部の6本の柱状図（約 200～260mの間隔で直線的に列ぶ）の場合を示す。なお、土質の状態区分はこの地域に現れる地層と日本統一土質分類の簡易分類を考慮し、①[砂]、②[…まじり砂]、③[…質砂]、④[シルト]の4分類とし、深度間隔 Δz は1mとし、対象深度は47mとした。図-1には6本の柱状図（A～F）が示してある。また、表-1には、各柱状図を基準柱状図とした場合の各々の柱状図の X^2 値が示してある。また、この表の最下欄には6本の柱状図の推移確率行列の平均値を基準とした場合の X^2 値が示してある。

この一覧表より、 X^2 値は最小値 1.9から最大値 22 まで大きく変化していることがわかる。また、基準柱状図1本について X^2 値を比較すると、その大きさが急変する所のあることがわかる。たとえば、基準柱状図をAとした場合（表の1行目）には、柱状図CとDの間で大きな差が表れている。平均の P^0 に対する X^2 値では柱状図A、D、Eの値が小さく、柱状図B、C、Fの値が大きくなっている。このことは、同一地域の類似した柱状図でも、式（8）の X^2 値により、類似の程度を客観的に評価できることを示すものと考えられる。

5. おわりに 今後、多くの地域の解析を通じて、 X^2 値のばらつきの程度、地域特性などを明らかにして行きたい。

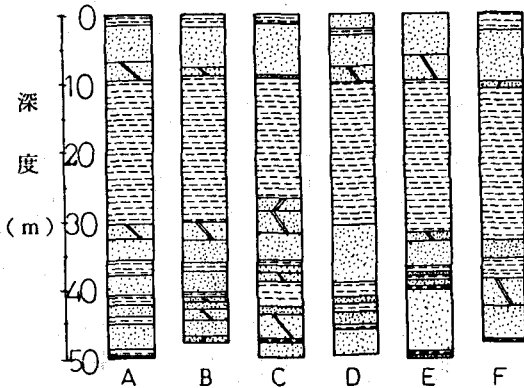


図-1 土質柱状図

表-1 カイ2乗値の一覧表

$P^0 \backslash$	A	B	C	D	E	F
A	0	9.72	9.62	3.13	5.39	5.21
B	11.58	0	11.81	11.48	7.88	8.97
C	6.65	3.91	0	5.91	8.10	9.68
D	1.80	9.85	10.10	0	4.53	5.29
E	14.59	11.90	21.65	14.21	0	2.49
F	8.10	5.46	9.44	7.58	1.91	0
平均	3.21	9.90	9.27	3.60	3.61	8.64

参考文献

- 1) 板橋一雄：「土質柱状図のモデル化に関する研究」、地盤工学におけるリスク評価手法に関するシンポジウム論文集、土質工学会、pp. 1～8、1987
- 2) 森村英典、高橋幸雄：「マルコフ解析」（ORライブラリー18）、日科技連出版社、1979