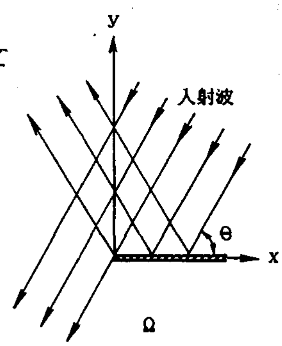
波浪の回折現象への境界要素法の適用

中部大学　工学部　正　員　○　吉　田　吉　治
中部大学　工学部　正　員　　松　梨　順三郎

<u>まえがき</u>　境界要素法は無限の広がりを持っている領域をモデル化できるという固有の特性をもっており、波浪の回折問題または港内の波の変形など、Helmholtz 方程式を基礎方程式とする問題の解法に利用される。この場合、無限遠の境界条件として Sommerfeldの放射条件が 一般に用いられるが、ここでは解析解の既知である半無限の線形防波堤をモデルにして、境界要素法による解の精度を検討する。

<u>問題の設定と境界要素法による定式化</u>　図－１のように半無限線形防波堤の先端に原点、防波堤に沿ってｘ軸、それに直交するようにｙ軸をそれぞれ平均海面上に設定する。また、ｚ軸を鉛直上向にとる。入射波はｘ軸に対して 入射角($\pi/2-\Theta$)で入射してくるものとする。基礎方程式および境界条件式はそれぞれ次のようになる。



図－１　入射波の回折

$$\text{領域 } \Omega \;:\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \qquad (1)$$

$$\text{境界 } \Gamma_c \;:\quad \frac{\partial\phi}{\partial n}=0 \qquad (2)$$

$$\text{境界 } \Gamma_\infty :\quad \frac{\partial\phi}{\partial R}+i_0k\phi=\frac{\partial\phi_I}{\partial R}+i_0k\phi_I \qquad (3)$$

ここに、$\Gamma=\Gamma_c+\Gamma_\infty$とする。$\phi$は速度ポテンシャルで

$$\phi=-\frac{i_0gH}{2\sigma}\frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh[kd]}\psi(x,y)e^{-i_0\sigma t} \qquad (4)$$

Γ_cとΓ_∞は図－２のようにそれぞれ防波堤境界および無限遠方の円形境界(半径R)とする。ｎは境界における外向法線、$dn=dR$、ｔは時間、ｄは水深、Ｈは波高、$k=2\pi/L$，$\sigma=2\pi/T$とし、ＬおよびＴは波長と周期とする。$i_0=\sqrt{-1}$とし、さらに

$$\phi=\phi_I+\phi_R,\quad \psi=\psi_I+\psi_R \qquad (5)$$

ϕ_Iは入射波、ϕ_Rは散乱波、ψ_Iとψ_Rはそれぞれϕ_Iとϕ_Rとに対応したポテンシャルとする。また、式（３）は いわゆる Sommerfeldの放射条件式である。式（４）を式（１）に代入し、上記の問題を$\phi(x,y,z,t)$から$\psi(x,y)$に変換すると次のようになる。

$$\Omega \;:\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+k^2\psi=0 \qquad (6)$$

$$\Gamma_c \;:\quad \frac{\partial\psi}{\partial n}=0\ (=\bar{q}) \qquad (7)$$

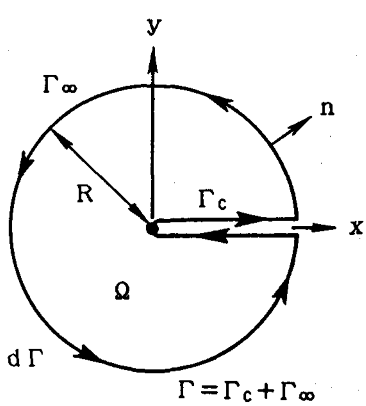
$$\Gamma_\infty :\quad \frac{\partial\psi}{\partial R}+i_0k\psi=\frac{\partial\psi_I}{\partial R}+i_0k\psi_I=f(x,y) \qquad (8)$$

ここに、入射波のポテンシャルψ_Iは次式で与えられる。

$$\psi_I=\exp[i_0k(x\cos\Theta+y\sin\Theta)] \qquad (9)$$

したがって、$f(x,y)$は既知関数となる。重みつき残差法によって問題を定式化すると次式を得る。

$$\iint_\Omega\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+k^2\psi\right)\psi^*\,dx\,dy \qquad (10)$$
$$=\int_{\Gamma_c}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}-\bar{q}\right)\psi^*\,d\Gamma+\int_{\Gamma_\infty}\left(\frac{\partial\psi}{\partial R}+i_0k\psi-f\right)\psi^*\,d\Gamma$$



図－２　境界の説明

重み関数ψ^*として次式の解を用いる。

$$\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi^*}{\partial y^2}+k^2\psi^*+\delta_i=0 \qquad (11)$$

ここにδ_iはDiracのデルタ関数である。上式の解は式（６）の基本解であり、次式のようになる。

$$\psi^*=\frac{1}{4i_0}H_0^{(2)}(kr),\quad \frac{\partial\psi^*}{\partial r}=-\frac{1}{4i_0}H_1^{(2)}(kr) \qquad (12)$$

ここに、$H_0^{(2)}$および$H_1^{(2)}$はそれぞれ0次および1次の第2種Hankel関数である。式（11）の両辺にψをかけ、領域Ωで積分すると次式をうる。

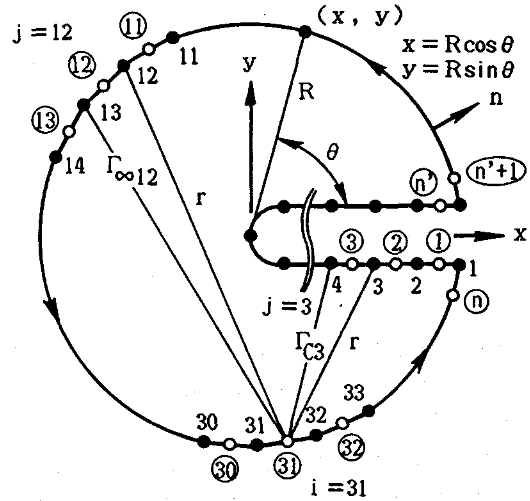
$$\iint \psi\left(\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi^*}{\partial y^2}+k^2\psi^*\right)dx\,dy=-\psi_i \tag{13}$$

式（10）の左辺を部分積分し、Gaussの定理を適用して、式（13）を代入すると、次式となる。

$$\text{左辺}=-\psi_i+\int_\Gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\psi^*-\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\psi\right)d\Gamma \tag{14}$$

上式を式（10）に代入して整理すると

$$\psi_i+\int_\Gamma\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\psi\,d\Gamma=\int_{\Gamma_c}\bar{q}\psi^*d\Gamma+\int_{\Gamma_\infty}(f\psi^*-i_0k\psi\psi^*)\,d\Gamma \tag{15}$$



図－3　$A_{31,3}$，$B_{31,12}$，D_{31}の計算の説明

i点を境界上にとると

$$c_i\psi_i+\int_\Gamma\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\psi\,d\Gamma-\int_{\Gamma_c}\bar{q}\psi^*d\Gamma+i_0k\int_{\Gamma_\infty}\psi\psi^*d\Gamma=\int_{\Gamma_\infty}f\psi^*d\Gamma \tag{16}$$

ここに、C_iは定数である。$\bar{q}=0$とし、一定線形要素を適用すると、図－3を参照し、次式を得る。

$$c_i\psi_i+\sum_{j=1}^{n}\psi_j\int_{\Gamma_j}\frac{\partial\psi^*}{\partial n}d\Gamma+i_0k\sum_{j=n'+1}^{n}\psi_j\int_{\Gamma_{\infty j}}\psi^*d\Gamma=\sum_{j=n'+1}^{n}\int_{\Gamma_{\infty j}}f\psi^*d\Gamma \tag{17}$$

ここに、nは要素数、iは節点番号とする。式（17）においてi＝1からi＝nまでとり、結果を行列表示すると

$$\begin{bmatrix} c_1 & \cdots & 0\\ & c_2 & \vdots\\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & c_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \cdots & A_{1,n'+1} & A_{1,n'+2} & \cdots & A_{1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{n'+1,1} & & A_{n'+1,n'+1} & A_{n'+1,n'+2} & & A_{n'+1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n'+1} & A_{n,n'+2} & \cdots & A_{n,n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_n\end{bmatrix}+i_0k\begin{bmatrix}0 & \cdots & B_{1,n'+1} & B_{1,n'+2} & \cdots & B_{1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ B_{n'+1,1} & & B_{n'+1,n'+1} & B_{n'+1,n'+2} & & B_{n'+1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ B_{n,1} & \cdots & B_{n,n'+1} & B_{n,n'+2} & \cdots & B_{n,n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\\ \vdots\\ D_n\end{bmatrix}$$

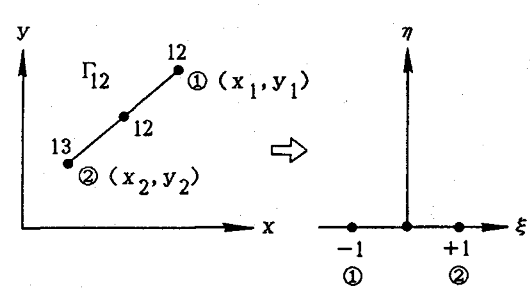
たとえば、$A_{31,3}$，$B_{31,12}$，D_{31}はそれぞれ次式のようになる。

$$A_{31,3}=\int_{\Gamma_3}\frac{\partial\psi^*}{\partial n}d\Gamma=\frac{1}{4i_0}\sum_{\alpha=1}^{4}[J_1(kr)-i_0Y_1(kr)]_\alpha\cdot\left[\frac{\text{dist}}{r}W\right]_\alpha\cdot[J]_\alpha \tag{19}$$

$$B_{31,12}=\int_{\Gamma_{12}}\psi^*d\Gamma=\frac{1}{4i_0}\sum_{\alpha=1}^{4}[J_0(kr)-i_0Y_0(kr)]_\alpha\cdot[W]_\alpha\cdot[J]_\alpha \tag{20}$$

$$D_{31}=\frac{k}{4}\sum_{j=n'+1}^{n}\left[\sum_{\alpha=1}^{4}\{(1+Q)(E+i_0F)\cdot W\cdot[J]\}_\alpha\right]_j \tag{21}$$

ここに、$Q=\cos\theta\cos\Theta+\sin\theta\sin\Theta$，$E=\cos(kRQ)J_0(kr)+\sin(kRQ)Y_0(kr)$，$F=\sin(kRQ)J_0(KR)-\cos(kRQ)Y_0(kr)$とし、$J_0$と$J_1$は第1種、$Y_0$と$Y_1$は第2種のそれぞれ Bessel関数である。distは節点31と節点3との距離である。また図－4に示すように、変換式$x=\sum_{i=1}^{2}\phi_i x_i$，$y=\sum_{i=1}^{2}\phi_i y_i$，$\phi_1=(1-\xi)/2$，$\phi_2=(1+\xi)/2$によってxy座標の要素をξ軸上のξ＝−1～＋1間に変換し、Gauss の4点積分を実行する。Wおよび［J］は重み、および変換ヤコビアンである。式（18）を解いて、境界上の値が既知となると、それらを式（15）に代入し、領域内任意点のψが求まる。結果は講演時に発表する。



図－4　要素Γ_{12}のξ軸への変換