II－27

局地風の三次元数値解法についての一考察

信州大学工学部　正　員　富所　五郎　　学生員　○越野　武一・棚橋　克哉

1．はじめに

大気中の汚染物質の動きは，風による移流・拡散の影響を多大に受けている。このため近年，この風の動き（特に局地風等）についての研究が多くなされている。

本研究では，従来より富所等[1] が提案している開水路の三次元解析法の局地風への応用について検討する。この三次元解析法は，風速などの形状関数に対して水平方向の区分多項式と鉛直方向の余弦関数の積を用いる Galerkin 有限要素法によるモデルである。

2．基礎方程式

鉛直方向の運動方程式には静力学平衡が成り立つとすると，基礎式は次のようになる。[2],[3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L'\cdot u + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\bar{\theta}\frac{\partial \pi}{\partial x} + D'\cdot u + fv \qquad (1)$$

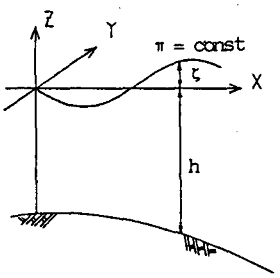
$$\frac{\partial v}{\partial t} + L'\cdot v + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\bar{\theta}\frac{\partial \pi}{\partial y} + D'\cdot v - fu \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial z} = -\frac{g}{\bar{\theta}^2}(\bar{\theta}-\theta') \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + L'\cdot\theta' + w\frac{\partial \theta'}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_h\frac{\partial \theta'}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_h\frac{\partial \theta'}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_v\frac{\partial \theta'}{\partial z}\right) \qquad (5)$$

ただし，$L' = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$，　$D' = \frac{\partial}{\partial x}\left(A_h\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A_h\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_v\frac{\partial}{\partial z}\right)$



図－１　座標の定義

また θ；温位，π；Exner 関数，状態方程式；$p=\rho RT$の関係がある。

ここに，x軸は東，y軸は北に，z軸は風が地形の影響を受けない上空において，π=const な面の平均高さを原点として上方向にとる(図－１)。u，v，wはそれぞれ x，y，z軸の風速成分，温位θ (=$\bar{\theta}+\theta'$)については，$\bar{\theta}$を平均値，θ'をそれからの偏差とする。 更に A_h，A_v はそれぞれ水平，鉛直渦動粘性係数，また K_h，K_v は水平，鉛直方向の熱量の渦動拡散係数である。

次に上式を簡単化する。上に述べたπ=const な面の高さを$z=\zeta$で表す。この面は,開水路の流れの自由水面に対応するもので，外部重力波の影響を受けて，この面の下の風の収束・発散にしたがって上下するものである。ζについては式(4)を[-h ～ ζ] の範囲でzについて積分すると式(6)が得られる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta} u\cdot dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta} v\cdot dz = 0 \qquad (6)$$

同様に式(4)を [-h ～ z] の範囲で，また式(3)を [z ～ ζ] の範囲でそれぞれzにいて積分し，得られた式を式(1),(2),(5) に代入し整理すると次式が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L'\cdot u - \left(\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{z} u\cdot dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{z} v\cdot dz\right)\frac{\partial u}{\partial z} = -g\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\int_{z}^{\zeta} g\cdot\frac{\theta'}{\bar{\theta}}\cdot dz + D\cdot u + f\cdot v \qquad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + L'\cdot v - \left(\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{z} u\cdot dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{z} v\cdot dz\right)\frac{\partial v}{\partial z} = -g\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\int_{z}^{\zeta} g\cdot\frac{\theta'}{\bar{\theta}}\cdot dz + D\cdot v - f\cdot u \qquad (8)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + L'\cdot\theta' - \left(\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{z} u\cdot dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{z} v\cdot dz\right)\frac{\partial \theta'}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_h\frac{\partial \theta'}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_h\frac{\partial \theta'}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_v\frac{\partial \theta'}{\partial z}\right) \qquad (9)$$

以上，式(6)～(9)は，u，v，θ'，ζ を未知量とする連立微分方程式となる。

3．基礎式の離散化

2．で導いた基礎式を先ず空間変数について離散化するために総和規約を用いて次の近似関数を考える。

$$\left.\begin{array}{ll} u=N_i\cdot\cos(B_p z')\cdot u_{pi}, & v=N_i\cdot\cos(B_p z')\cdot v_{pi} \\ \theta'=N_i\cdot\cos(B_p z')\cdot\theta'_{pi}, & \zeta=N_i\cdot\zeta_i \end{array}\right\} \quad B_p = \frac{p-1}{h+\zeta}\pi = \frac{p-1}{d}\pi \quad \begin{array}{l}(p=1,2,\cdots,m)\\(i=i,j,k)\end{array} \qquad (10)$$

ここに，$N_i=N_i(x,y)$ は従来より用いられている区分多項式で，本研究では三角形一次要素のものを用いている。また，m は各変数に対する展開項数である。

次に，基礎式(7),(8),(9)に対し重み関数として $W=N_i\cdot\cos\{Bp(z-\zeta)\}$ を，式(6)に $W=N_i$ を掛けて，重み関数の定義域内で積分を行う。一つの要素(節点 i,j,k)に対して離散化方程式，つまり要素方程式が得られる。要素が多数存在する場合は離散化方程式の各項を要素ごとに求め，重み関数にしたがって重ね合わせると，同様の式が求まる。要素方程式については紙面の都合上省略するが文献（１）を参照されたい。 次に時間変数に関する離散化法について述べる。時間微分項以外を全て右辺に移して行列形式に表示すると，各要素方程式はそれぞれ

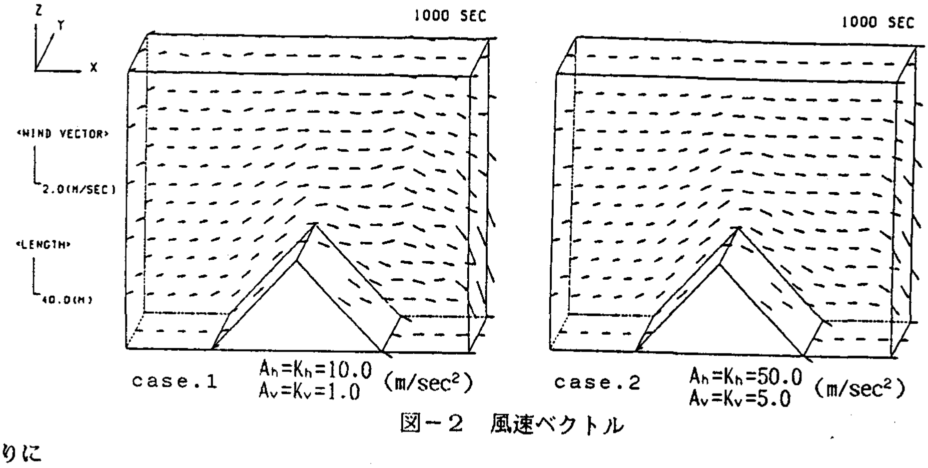
$$\mathbb{M}\cdot\frac{d}{dt}\mathbb{V}=\mathbb{F} \tag{11}$$

と同じ形の式となる。ここに，$\mathbb{M}$は時間微分項の係数よりなる質量行列，$\mathbb{V}$はそれぞれ u,v,ζ 等からなる列行列，$\mathbb{F}$は$\mathbb{V}$の関数である列行列である。上式は時間に関する常微分方程式でありこの積分法として陽的時間積分法であるTwo-step Lax-Wendroff法を用いて，時間についてstep-by-stepに解いてゆく。

４．適応例

本解析モデルの検討を行うにあたって，図－２に示す三次元三角形断面上における風速場を求めてみた。境界条件は，次の通りである。渦動粘性係数，渦動拡散係数をそれぞれ $A_h=K_h$，$A_v=K_v$ と設定し，領域全体に対して $\bar{\theta}=300$ K，$\theta'=$const とし，またｘ-軸負の方向から正の方向に，領域上面で 2.2 m/sec，下面で 1.8 m/sec となる直線分布で風を与える。

得られた結果を図－２(case.1，case.2)に示す。それぞれの粘性係数は下図のとおりである。斜面前方においては定常的な流れとなっているが，後方では乱れが大きく粘性係数の値が小さいほど乱れが大きくなっている。また $\theta'=$const としたことからζの変化があまり認められず h に対して最大で 0.002 であった（三角形断面における頂点上）。



図－２　風速ベクトル

５．おわりに

本稿に於いては，モデルの開発が主になり実際の流れに対してどの程度妥当性があるか比較できなかったが，差分法に比べて地形の影響を取り入れやすいため，今後より一般的な地形に対して適応してみたいと思う。更に流れに影響を与える粘性係数，密度，温度等の境界条件についても検討していきたいと思う。

【参考文献】

(1)．富所，荒木，吉田：開水路の流れの三次元数値解析法，第２９回水理講演会論文集，pp729～732，1985
(2)．高橋浩一郎著：総観気象学，岩波書店，pp20～52，1969
(3)．B.W.ATKINSON:Meso-scale Atmospheric Circulation,ACADEMIC PRESS,pp125～213,1981