II − 6

2段階推移モデルによる相関離散分布流量を受ける貯水池理論

名古屋工業大学 ○学生員 鈴木正人, 正員 長尾正志

1. 研究の概要

近年の電算機の発達はめざましく、従来敬遠されがちであった大次元の行列演算も比較的簡単に処理できるようになりつつある。本研究はLloydの結合分布の考え[1]と、Klemešの示した2段階推移の手法[2]を用い、相関離散分布流量を受ける貯水池の貯水量定常分布の導出法を、行列演算によって、できるだけ簡便かつ具体的に表現しようとするものである。

2. 2段階推移モデルによる貯水池理論

計算の簡便化から、貯水量推移を量的、時間的に離散化して取り扱う。つまり有効貯水池容量K、貯水量状態Z、目標放流量Mは、単位期間内総流量Qの離散化単位の整数倍で表す。また流量時系列は一次の自己相関を持つとし、上限nの流量分布を条件付き離散分布 g_{ij} $(i,j=0,1,\cdot\cdot,n)$ (前期間でiの流入があった時jの流入が生起する確率)で表現する。

2段階推移としての貯水量変化の解釈を記述する。ある単位期間を対象として、まず貯留のみを考え、ついで、期末に放流のみを行うようにみなす。その際、貯水池容量に制約された貯留可能性、および初期貯水量・期間内総流入量に由来する放流可能性は、ともに期間の期首・期末という離散時点で判別する。

貯水量変化を確率過程としてモデル化する際に、流量に相関を考慮しない場合、貯水量の純増分(=流入量−放流量)にだけ関心が払われ、流入と放流という2段階の推移を純増分による1段階の推移に置き換えて考えておけばよかった。しかし、流量に相関を考慮する場合、前期間の流量との関連から貯水量の純増分だけでなく、純増分を構成する流入量の値そのものにも関心を払わねばならない。そこで、貯水量の推移を、流入量による推移(貯留推移)と、放流による推移(放流推移)の2段階に分けて考える。2段階推移の概念を図−1に示す。図中において、下付き添字1, 2は時間間隔での期首、期末の状態量を意味し、上付き添字s, s+1は時間間隔Δs、Δ(s+1)の状態量を意味する。時間間隔Δsの期首の貯水状態 $Z^s{}_1$ はΔsの総流量 Q^s を受けて、Δsの期末の貯水状態 $Z^s{}_2$ へと推移する。これが貯留推移で、貯水池容量に制約された貯留可能性はここで考慮される。つぎに、$Z^s{}_2$ は目標放流量を放流することにより、時間間隔Δ(s+1)の期首の貯水状態 $Z^{s+1}{}_1$ へと推移する。これが放流推移であり、目標放流量の放流可能性はここで考慮される。流量に相関を考慮しない場合は、$Z^s{}_1$ から $Z^{s+1}{}_1$ への推移を直接考えればよかったが、相関を考慮する場合は、$Z^s{}_2$ をその途中に介在させて考えておかねばならない。

3. 行列を用いた貯水量推移表現

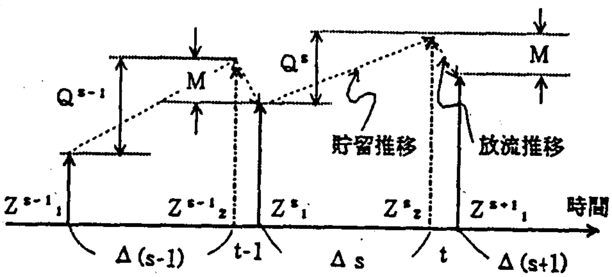
貯水量推移を2段階推移として行列で表現する。以下では一般に、ベクトルは行ベクトルを表す。

3. 1 流入量による貯水量推移(貯留推移) まずΔsの期首の貯水量分布 $\{H\}^s{}_1$ からΔsの期末の貯水量分布 $\{H\}^s{}_2$ への推移を考える。この推移は流入量により起こり、流入量の条件付き分布に支配される。この推移の推移確率行列Gの部分行列 g_{ij} $(i,j=0,1,\cdots K-1,K)$ は、

$$\mathrm{g}_{ij}\equiv\begin{array}{c|ccccccc}
\nearrow & 0 & 1 & 2 & \cdot & j-i & \cdot & n \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{0(j-i)} & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{1(j-i)} & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{2(j-i)} & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
n & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{n(j-i)} & 0 & 0
\end{array}
\qquad
\mathrm{g}_{iK}\equiv\begin{array}{c|cccccccc}
\nearrow & 0 & 1 & 2 & \cdot & K-i & K-i+1 & \cdot & n \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{0(K-i)} & g_{0(K-i+1)} & \cdot & g_{0n} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{1(K-i)} & g_{1(K-i+1)} & \cdot & g_{1n} \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{2(K-i)} & g_{2(K-i+1)} & \cdot & g_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
n & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{n(K-i)} & g_{n(K-i+1)} & \cdot & g_{nn}
\end{array}$$

$$(0\leqq j-i\leqq n,\ j\neq K) \qquad (0\leqq j-i\leqq n,\ j=K) \qquad \cdots\cdots(1)$$

また、どちらの場合も $\mathrm{g}_{ij}\equiv$ 零行列 $(j-i>n$ または $j-i<0)\cdots\cdot(2)$ である。



図－1　２段階推移の概念図

$\mathbb{G}$は（K＋1）×（n＋1）の次元を持つ。$\mathbb{G}$に合わせた表現として、貯水量分布ベクトル $\{H\} \equiv \{H0, H1, \cdots, Hi, \cdots, HK\}$，$Hi \equiv (h0i, h1i, \cdots, hni)$ とする。ここで、humは分割された貯水量分布であり、前の区間で流入量uを受けて貯水量状態がmになる確率を意味する。

$\mathbb{G}$を用いて $\{H\}^{s}{}_{1}$ から $\{H\}^{s}{}_{2}$ への推移を表すと次式となる。

$$\{H\}^{s}{}_{2} = \{H\}^{s}{}_{1} \cdot \mathbb{G} \quad \cdots\cdots (3)$$

３．２　放流量による貯水量推移（放流推移）　ここでは、Δsの期末の貯水量分布 $\{H\}^{s}{}_{2}$ からΔ(s+1)の期首の貯水量分布 $\{H\}^{s+1}{}_{1}$への推移を考える。この推移は放流によって起こり、推移行列に確率的成分は含まれない。したがって推移の可能性の有無によってその要素は、０または１、となる。放流推移行列$\mathbb{R}$の要素　r_{ij} (i,j=0,1,‥‥,K-1,K) は、

$$\left.\begin{array}{ll} r_{ij} \equiv (n+1)\text{次の単位正方行列} & (j = i - M \text{ または } j = 0 \text{ かつ } i - M < 0 \text{ の場合}) \\ r_{ij} \equiv (n+1)\text{次の零行列} & (\text{上記以外の場合}) \end{array}\right\} \cdots\cdots (4)$$

である。$\mathbb{R}$も$\mathbb{G}$と同じ次元を持つ。$\mathbb{R}$を用いて $\{H\}^{s}{}_{2}$ から $\{H\}^{s+1}{}_{1}$ への推移を表すと次式となる。

$$\{H\}^{s+1}{}_{1} = \{H\}^{s}{}_{2} \cdot \mathbb{R} \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

（３），（５）式より、$\mathbb{P} = \mathbb{G} \cdot \mathbb{R}$と表せば　$\{H\}^{s+1}{}_{1} = \{H\}^{s}{}_{1} \cdot \mathbb{P} \quad \cdots\cdots (6)$

となり、Moranが初期に提案した、流量系列が独立な場合と同様な表現が可能である。

４．　貯水量定常分布計算例

貯水状態確率の推移が(6)式のマルコフ連鎖の形で表現できることは、貯水池の機能評価に有用な手段を多々提供する[3)]が、その代表例として、貯水量定常分布の計算例を示す。紙面の関係上、計算方法は文献[3)]を参考にされたい。

貯水池条件は、K＝３，M＝１とし、流量分布としてr＝２，a＝0.4，ρ＝0.6の相関二項分布を用い定常分布｛W｝を計算した結果を以下に示す。

｛W｝＝｛0.326,0.271,0,⋮0.034,0.075,0.041,⋮0,0.134,0.119,⋮0,0,0｝

これより、定常的に貯水池が空になる確率は0.597で、内訳は、0.326：流入量が０で空水になる場合に対応、0.271：流入量が１で空水になる場合、0：流入量が２で空水の場合、などが分かる。

このように、２段階推移モデルを用いると、流量の自己相関性を考慮できるだけでなく、定常分布において、各貯水量の状態確率の内訳を知ることができる。なおこれらの結果を、Phatarfodらによる酔歩理論を用いた厳密解[4)]、および数値実験解と比較したところ、非常によい一致をみた。

５．　あとがき

今回は、計算例として、貯水量定常分布についてだけ述べたが、貯水量推移が推移確率行列で表せることは、貯水池の評価において量的・時間的の様々な面で応用が可能であり、従来近似的にしか取り扱い得なかった問題が、厳密に解析可能となろう。

６．　参考文献　１）E.H.Lloyd: Resevoirs with serially correlated inflows, Technometrics, Vol.5, No.1, pp.85-93, 1963　２）V.Klemeš: A Two-Step probabilistic model of storage reservoir with correlated inputs, Water Resource Research, Vol.6, No.3, June, 1970, pp.756-767　３）長尾正志：利水用貯水池の取水機能の信頼性評価に関するマルコフ連鎖理論の応用，第２１回水理講演会論文集，pp.133-141, 1977　４）R.M.Phatarfod & K.V.Mardia : Some results for dams with Markovian inputs, Jour. Appl.Prob., Vol.10, pp.166-180, 1973