

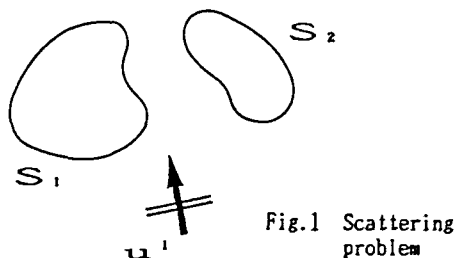
隣接地下空洞の動的相互作用問題の一解析

東海大学海洋学部 学生員 ○樋江井 夕紀夫
東海大学海洋学部 正員 北 原 道 弘

1. はじめに

地下空間に隣接した空洞群を設置する場合、空洞群の相互影響による弾性波の散乱特性を把握しておくことが必要となる。本研究では、3次元無限弾性体中に存在する複数個の空洞による多重散乱問題を、境界積分方程式法を用いて解析する。また、その解法として、著者らが2次元面外多重散乱問題で用いたBorn級数による解法¹⁾を選ぶ。なお、ここでは最も基本的な2個の空洞問題を設定するが、空洞の数が増加しても、解法の要点は同じである。

2. 空洞による散乱問題の定式化



いま、Fig. 1 に示すような2個の空洞を考える。各空洞表面 S_1, S_2 上の境界条件は、表面力が零； $t=0$ である。このとき、離散化した後の弾性母体に対する境界積分方程式は次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここに、 u_1^I は入射波であり、 u_i は各空洞表面上の変位である。また、2重層マトリクス H_{ij} の下添字は j 番目の空洞表面から i 番目の空洞表面への影響を意味する。すなわち、 H_{11} と H_{22} は自己影響を表し、 H_{12} と H_{21} は相互影響を表す。

なお、本解析で用いた3次元基本解は次のようである。

$$U_{ij}(x, y) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{e^{ik_T r}}{r} \delta_{ij} + \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{e^{ik_T r}}{r} - \frac{e^{ik_L r}}{r} \right\} \right] \quad (2)$$

ここで、 k_L と k_T は、それぞれ縦波と横波の波数であり、 r は距離 $r = |x - y|$ を表す。

3. Born級数による解法

式(1) を次のように変形する。

$$u = A^{-1} u^I + Cu \quad (3)$$

ここに、 A^{-1} 、 C などは次のようである。

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} H_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & H_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$C = \begin{bmatrix} H_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & H_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -H_{12} \\ -H_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$u = \{u_1, u_2\}^T, u^I = \{u_1^I, u_2^I\}^T \quad (6)$$

式(3) の右辺第1項は既知であるので、第2項を無視し、解 u の第0次近似を次のように置く。

$$u_0 = A^{-1} u^I \quad (7)$$

これは、Born近似として広く知られ、入射波だけによる空洞の自己応答を表しており、低周波数域では良い近似を示す。また、第1、第2、第3次近似は次のようであり、式(3)、(5) からわかるように、空洞間の相互作用による応答を順次含む。

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + Cu_0 \\ u_2 &= u_0 + Cu_1 = u_0 + Cu_0 + C^2 u_0 \\ u_3 &= u_0 + Cu_2 = u_0 + Cu_0 + C^2 u_0 + C^3 u_0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (8)$$

これより、第 n 次近似は次のように書ける。

$$u_n = u_0 + Cu_{n-1} = \sum_{N=0}^n C^N u_0 \quad (9)$$

ここで問題となるのは式(9) の収束性、すなわち、マトリクス C のベキ乗計算の収束性である。

4. 解析モデル

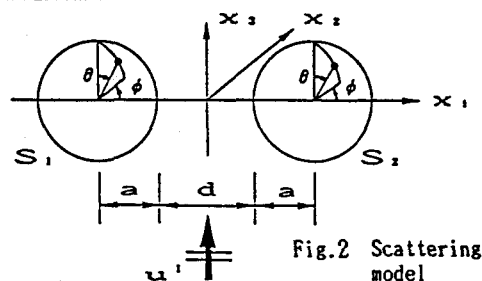


Fig. 2 Scattering model

ここでは、Fig. 2 に示すように、半径 a の等しい球形空洞が x_1 軸上に並列的に存在する場合を考え、入射波は x_3 軸に沿って鉛直下方から入射するものと仮定した。なお、空洞の半径を a とし、空洞間の距離を $d = a/5$ として、入射波は次式に示す単位振幅の平面 P 波とした。

$$u^I(\mathbf{x}) = e_3 \exp(ik_L x_3) \quad (10)$$

また、以下の数値解析例も含めて、座標系を Fig. 2 のように定義している。球座標 θ は各球の北極 (x_3 軸方向) から計られた角度であり、 ϕ は $x_1 - x_2$ 平面内の x_1 軸方向から計られた角度である。

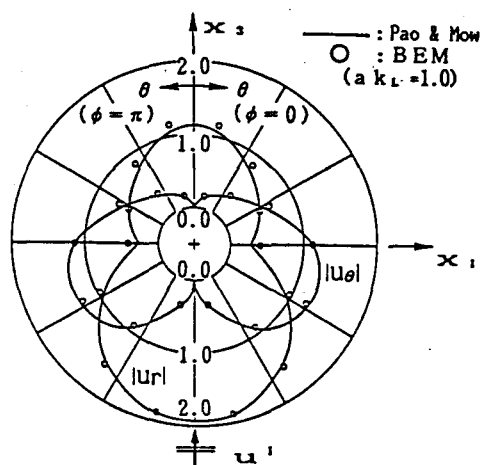
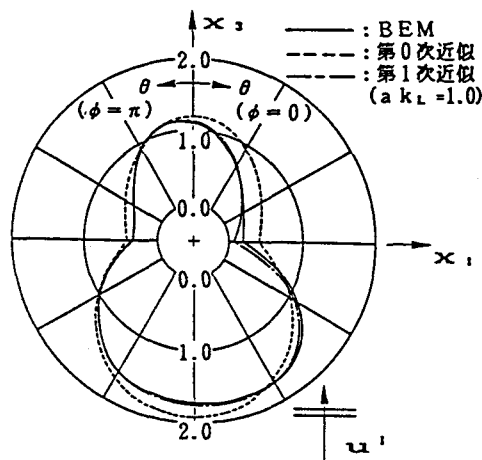
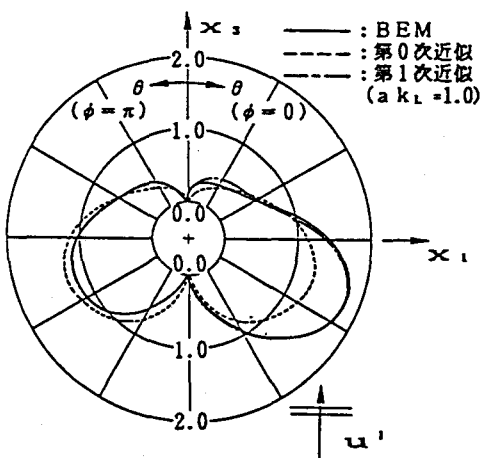
解析上の空洞表面は、1 個の球につき 56 の四角形要素で近似しており、一定要素を用いている。

5. 数値解析例

Fig. 3 は 1 個の空洞の場合について、積分方程式法の結果を Pao と Mow の結果²⁾によって検証したものである。Fig. 4 と Fig. 5 は 2 個の空洞の場合について、式 (9) の収束性を変形レベルで確認したものであり、左側空洞上の変位の極座標成分 $|u_r|$ と $|u_\theta|$ を描いたものである。図中の——は、式 (1) に示した積分方程式系を直接解いた結果である。-----は Born 級数の第 0 次近似であり、——は第 1 次近似である。図中には第 1 次近似までを示したが、第 2 次近似はほぼ正解に一致する。

参考文献 1) 樋江井・北原; 面外多重散乱問題における Born 級数の収束性について, 土木学会第 43 回年次学術講演会講演概要集, I-1, 1988 年。

2) Pao, Y. H. and Mow, C. C.; Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations, Crane Russak & Co. Inc., New York, 1973.

Fig. 3 $|u_r|$ and $|u_\theta|$ for single cavityFig. 4 $|u_r|$ for double cavitiesFig. 5 $|u_\theta|$ for double cavities