全確率分布安全性指標による設計

信州大学工学部　正員　長　尚
信州大学工学部　○鈴木宏明

1.・まえがき

一般に簡単な計算で求められる全確率分布安全性指標β（信頼性指標ともいう）は，真の破壊確率p_Fを用いて標準正規確率分布逆関数Φ^{-1}（・）から求められる標準正規変数の符号を逆にした値と，比較的対応の良い指標すなわち，$\beta \fallingdotseq -\Phi^{-1}(p_F)$・・・（1）である。[1) 2)] しかも通常の構造物の設計問題では，断面寸法の決定などに影響を直接与えるのは破壊確率p_Fではなく，安全性指標βの方である。[2)] ところで全確率分布安全性指標βは，設計段階では未知である断面寸法などが既知として算定され，設計で目標とする安全性指標β_Dを与えて断面寸法などを決定する効率の良いアルゴリズムは必ずしも確立していない。そこで本文では，数値微分法を用いたNewton-Raphsonの反復法で，十分効率良く断面寸法などを決定できることを示すと共に，若干の計算例によって考察を加える。なお安全性指標を用いて設計するのは，安全性指標を求める際の設計点で設計することだと誤解され易い。[3)] これは設計点という名称からくる誤解で，設計値としてはこの設計点（標準化空間における破壊基準曲面への原点からの最短距離の点）に相当する変数値を採用する必要は必ずしもない。結果として設計点が一致するように設計値を採用すれば良いのである。

2．計算法

いま個々の確率変数**X**を，$\mathbf{X}=(x_1 \cdot x_i \cdot x_D \cdot x_n)^T$・・・（2）とし，この中の$x_D$が設計において決めるべき断面寸法などの確率変数とする。そして決定するものはこの変数の平均値$\bar{x}_D$とする。このようにしたのは，断面寸法などは設計値と平均値がほぼ一致すると考えられるからである。もし設計値と平均値が合致しない場合は，確率レベルに応じて換算して設計値とすればよい。このように問題を設定すると，$\bar{x}_D$以外の各確率変数の確率分布に関する情報**D**（x_Dの確率分布関数形を含む），$\mathbf{D}=(D_1 \cdot D_i \cdot D_D \cdot D_n)^T$・・（3）と破壊基準関数を与えて，設計で目標とする安全性指標β_Dが達成されるように，$\bar{x}_D$を決定することになる。これを数値微分法を用いたNewton-Raphsonの反復法で解くことにする。ここでk回目の反復におけるx_Dの平均値を$\bar{x}_{D\,k}$とし，その時の確率変数ベクトルを，$\mathbf{X}_k=(x_1 \cdot x_i \cdot x_{D\,k} \cdot x_n)^T$・・・（4）とし，$\bar{x}_{D\,k}$に微小変化量$\Delta\bar{x}_D$を加えた値，$\bar{x}_{D\,k}{}'=\bar{x}_{D\,k}+\Delta\bar{x}_D$・・（5）を，$x_D$の平均値とした時の確率変数ベクトルを，$\mathbf{X}_k{}'=(x_1 \cdot x_i \cdot x_{D\,k}{}' \cdot x_n)^T$・・・（6）とすると，（k＋1）回目の$x_D$の平均値$\bar{x}_{D\,k+1}$は次のように表される。　$\bar{x}_{D\,k+1}=\bar{x}_{D\,k}-\{\beta_D-\beta(\mathbf{X}_k)\}\Delta\bar{x}_D/\{\beta(\mathbf{X}_k)-\beta(\mathbf{X}_k{}')\}$・・・（7）　ここにβ（・）は・に相当する確率変数ベクトルに対する全確率分布安全性指標である。この式（7）を収束するまで反復適用するが，以下の計算例では収束条件を次式とした。$|\bar{x}_{D\,k+1}-\bar{x}_{D\,k}|/\bar{x}_{D\,k+1}<0.0001$・・・（8）　なお$\bar{x}_{D\,k}$の微小変化量としては，$\Delta\bar{x}_D=\bar{x}_{D\,k}/100$・・・（9）とすることで十分精度良い結果が得られることを，数多くの計算例で確かめた。また反復回数も後述の計算例に見られるように数回以下である。

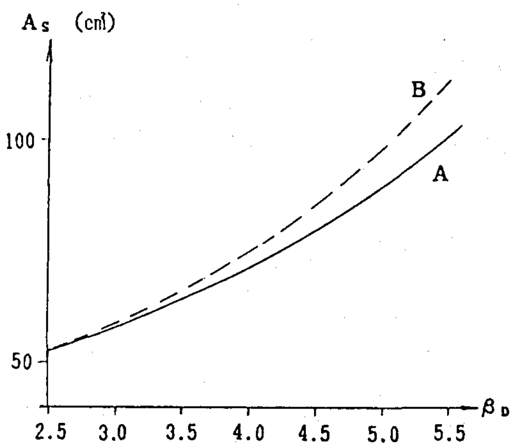
3．計算例

(1)曲げモーメントが作用する鋼製はりの例

鋼製はりの曲げ破壊などの破壊基準関数g（**X**）は通常次のような形となる。[4)] $g(\mathbf{X})=x_1\,x_2\,x_3-(x_4+x_5)\,x_6$・・・（10）　ここで$x_1$の平均値$\bar{x}_1$を設計目標安全性指標$\beta_D=4$で設計するものとし，平均値$\bar{\mathbf{X}}$（無次元化してある），変動係数**V**は次のようなものであるとする。$\bar{\mathbf{X}}=(\cdot\ 2.0\ 1.0\ 1.0\ 1.0\ 1.0)^T$・・・（11）　$\mathbf{V}=(0.1\ 0.15\ 0.2\ 0.05\ 0.35\ 0.1)^T$・・・（12）　すべての確率変数を正規分布であるとした場合，$\bar{x}_1=5.84$を，対数正規分布であるとした場合，$\bar{x}_1=4.03$を得た。この例では，前者が後者に比べてかなり大きい値となった。なおこの例では反復回数は2～4回であった。

(2)曲げモーメントが作用する鉄筋コンクリート単鉄筋長方形はり断面の例

曲げモーメントが作用する鉄筋コンクリート単鉄筋長方形はり断面の破壊基準関数 $g(\mathbf{x})$ は，次のような式となる。[5] $g(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \{x_3 - (x_1 x_2)/(1.7 x_4 x_5)\} x_6 - (x_7 + x_8) x_9$ ・・・(13)　ここに，x_1 は鉄筋断面積，x_2 は鉄筋の降伏点，x_3 は有効高さ，x_4 は断面の幅，x_5 はコンクリートの円柱供試体の強度，x_6 は強度算定修正係数，x_7 は死荷重曲げモーメント，x_8 は活荷重曲げモーメント，x_9 は曲げモーメント算定修正係数である。ここで鉄筋断面積の平均値以外の各確率変数に関する情報が次のように与えられ，かつ設計目標安全性指標 β_D が指定されて，鉄筋断面積の平均値を決定する問題を考える。$\bar{\mathbf{X}}$ = (・ 3300.0 kgf/cm² 84.92 cm 100 cm 288 kgf/cm² 1.0 6061000 kgf-cm 2564000 kgf-cm 1.0)^T ・・・(14)　$\mathbf{V}$ = (0.03 0.05 0.05 0.2 0.1 0.05 0.35 0.1)^T ・・・(15)　すべての確率変数を正規分布とした場合（A）と対数正規分布とした場合（B）について，種々な設計目標安全性指標 β_D を与えて計算した結果が図－1に示されている。なおこの例では，許容応力度設計法の釣合断面が，x_3 = 84.92 cm，x_1 = 75.49 cm² である。この場合の安全性指標は，β(A) = 4.27，β(B) = 4.04　である。図－1に見られるように，通常の設計範囲と考えられる β_D ＝3～5では，設計結果である鉄筋断面積は安全性指標にほぼ比例している。一方破壊確率はこの範囲では，10のマイナス3乗から7乗のオーダーで大きく変動する。別文[2] でも指摘しているように，設計結果に直接関係するのは安全性指標で，破壊確率ではない。なおこの計算例においては，反復回数は，3～5回であった。



図－1　設計値と設計目標安全性指標 β_D の関係

(3)軸力と曲げモーメントが作用する鉄筋コンクリート対称複鉄筋長方形柱断面の例

鉄筋コンクリート対称複鉄筋長方形柱断面の地震時における破壊基準関数 $g(\mathbf{x})$ の一例[4]として次の式を用いる。$g(\mathbf{x}) = [x_3 x_4 x_6 - 0.5(x_8 + x_9)\{(x_8 + x_9)/(x_1 x_5) - x_2\}] x_7 - (x_{10} + x_{11}) x_{12}$ ・・(16) ここに，x_1 ：柱の幅，x_2 ：柱断面の高さ，x_3 ：引張鉄筋と圧縮鉄筋の間隔，x_4 ：片側鉄筋の断面積，x_5 ：コンクリートの圧縮強度，x_6 鉄筋の降伏点強度，　x_7 ：強度算定修正係数，x_8 ：死荷重軸力，x_9 ：地震荷重軸力，x_{10} ：死荷重曲げモーメント，x_{11} ：地震荷重曲げモーメント，x_{12} ：断面力算定修正係数である。ここで平均値 $\bar{\mathbf{X}}$，変動係数 $\mathbf{V}$，確率分布 $\mathbf{D}$ を次の通りとして，片側鉄筋の断面積を設計目標安全性指標 β_D ＝2として求めた。結果は86.6cm²であり，反復回数は5回であった。$\bar{\mathbf{X}}$ = (0.9m 0.9m 0.742m ・ 3000tf／m² 40000 tf／m² 1.0 100tf 7.5tf 20tf-m 100tf-m 1.0)^T ・・・(17)　$\mathbf{V}$ = (0.04 0.04 0.08 0.03 0.2 0.05 0.2 0.1 0.5 0.2 0.50.2)^T ・・・(18)　$\mathbf{D}$ = (N N N N LN W N N EX1 N EX1 N)^T ・・・(19)　ここに，N：正規分布，LN：対数正規分布，W：ワイブル分布，EX1：極値I型最大値分布を表す。

参考文献

1)長尚：構造物の信頼性解析に用いる信頼性指標について，JCOSSAR'87論文集，Vol. 1，1987. 2)長尚：全確率分布安全性指標の有効性について，第43回土木学会年次学術講演会講演概要集，1987. 3)Nishino, F. et al.: A Probabilistic Basis for Fractile-Based Structural Design, Proc. JSCE,No. 35, 1984. 4)長尚：相関がある場合の全確率分布安全性指標，構造工学論文集，32A，1986. 5)長尚：安全性指標に関する若干の考察，土木学会論文報告集，第324 号，1982.