離散キルヒホッフ要素による板・殻構造物の弾塑性有限変位解析

○名古屋大学　学生員　加藤 正宏
名古屋大学　正　員　宇佐美 勉

1．はじめに　板・殻の解析を行なう場合，そのシンプルさから三角形平板要素がしばしば用いられる．しかし，有効な適合要素を得ることが困難であることから，解析の多くは不適合要素によって行なわれてきた．そこで本研究では薄板のC^0級適合要素が容易に得られる離散キルヒホッフ要素（以後ＤＫＴ要素と呼ぶ）を用いて解析を行ない，その有効性について検証した．この要素は，せん断変形を考慮することによりたわみとたわみ角を独立に仮定するMindlinの平板理論に基づくことにより適合性を保ち，離散点でキルヒホッフの拘束を課すことにより薄板解に収束するという性質がある．なお，ＤＫＴ要素の優秀さについては文献1),2)で詳しく述べられている．

2．定式化　平板要素の定式化は平面応力場で膜要素と曲げ要素を独立に重ね合わせることによって得られる（図－1参照）．膜要素としては定ひずみ三角形を，曲げ要素としてはＤＫＴ要素を採用した．以下ではＤＫＴ要素の定式化について述べる．まずコーナーおよび辺の中点に節点をもつ6節点三角形要素を考える（図－2参照）．たわみ角β（図－3参照）は要素の全域で２次式で仮定される．

$$\beta x=\Sigma N_p \beta x_p \quad , \quad \beta y=\Sigma N_p \beta y_p \qquad (p=1\sim6) \qquad (1),(2)$$

ここにβ_{xp}，β_{yp}は接点ｐにおける各値であり，Ｎは形状関数である．また，たわみWの辺方向の微分が辺上でのみ2次式で仮定され次式で表される．

$$W,s_k=-\frac{3}{2\ell_{ij}}W_i-\frac{1}{4}W,s_i+\frac{3}{2\ell_{ij}}W_j-\frac{1}{4}W,s_j \qquad (3)$$

ここにｓは辺方向を表わし左回りを正とする．i,jはコーナー節点を，ｋは辺ijの中間節点を表わし，また，ℓ_{ij}は辺ijの長さを表わしている．次に各節点で以下のキルヒホッフの拘束を課す（図－4参照）．

$$W,x+\beta x=0 \quad , \quad W,y+\beta y=0 \qquad \text{（コーナー節点）} \qquad (4),(5)$$
$$\beta s+W,s=0 \qquad \text{（中間節点）} \qquad (6)$$

また，ｎを辺の外向き法線方向とするとβnが線形で仮定され，中間節点におけるβnが次式で表される．

$$\beta n_k=0.5\ (\beta n_i+\beta n_j) \qquad (7)$$

式(4)～(7)の関係により中間節点の自由度が消去され，βx，βyをコーナー節点自由度でのみ表す次式が得られる．

$$\beta x=\mathbb{H}x^T\mathbb{U} \quad , \quad \beta y=\mathbb{H}y^T\mathbb{U} \qquad (8),(9)$$

ここに$\mathbb{H}x^T$，$\mathbb{H}y^T$はＤＫＴ要素の新たな形状関数ベクトルであり，9個の成分をもつ．$\mathbb{U}$は曲げに関する節点自由度ベクトルであり以下の成分をもつ．

$$\mathbb{U}^T=\{W_1,\theta x_1,\theta y_1,W_2,\theta x_2,\theta y_2,W_3,\theta x_3,\theta y_3\} \qquad (10)$$

また，式(8),(9)を微分することにより曲率ベクトル$\mathbb{K}$が得られる．

$$\mathbb{K}=\mathbb{B}\mathbb{U} \qquad (11)$$
$$\mathbb{K}^T=\{\beta x,x \ ,\ \beta y,y \ ,\ \beta x,y+\beta y,x\} \qquad (12)$$

ここに$\mathbb{B}$は曲率−節点変位関係行列である．以上より，曲げに関する剛性行列K_{DKT}が次式で得られる．

$$K_{DKT} = \int_v \mathbb{B}^T D \mathbb{B} \, dv \qquad (13)$$

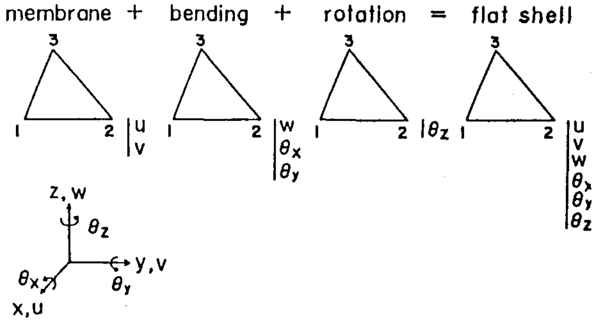
ここにDは平面応力場における応力−ひずみ関係行列であり，vは三角形要素の体積である．

3．結果と考察　本解析の結果とその考察については当日発表する．

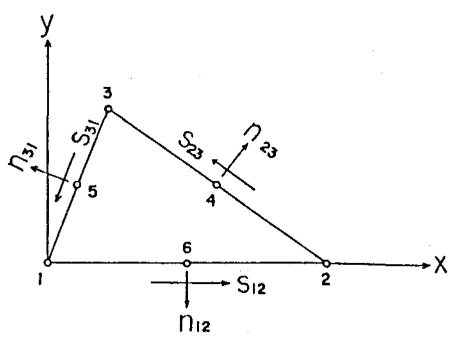
参考文献

1) J.L.Batoz,K.J.Bathe and L.W.Ho,A Study of three-node triangular plate bending elements. Int. J.Numer.Meth.Engng,15,pp.1771-1812(1980)

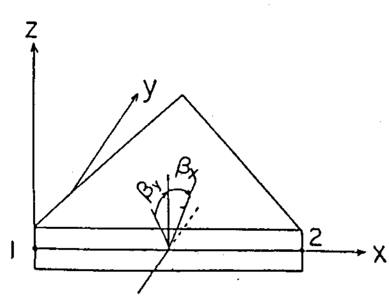
2) K.J.Bathe and L.W.Ho,A simple and effective element for analysis of general shell structures. Comput.Structures,13,pp.673-681(1981)



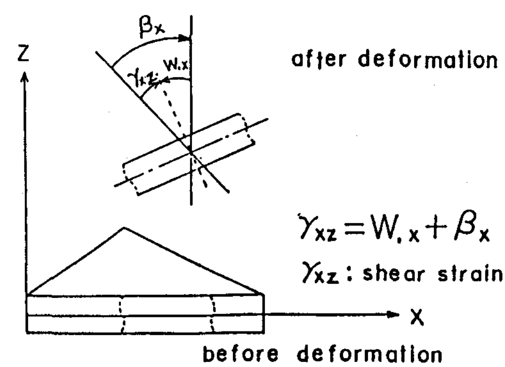
図−1．平板要素と節点自由度



図−2．6節点三角形



図−3．たわみ角βの定義



図−4．せん断を伴う曲げ要素の回転角