固有周期を最小化する長方形板の断面変化法に関する研究

○ 岐阜大学 学生員 斎藤 博之
岐阜大学 学生員 近藤 誠
滝上工業 正会員 安藤 浩吉

1 厚さの変わる板の微分方程式

厚さが緩やかに変化する等方性平板の曲げ問題に関する微分方程式として、断面力 M_x, M_y, M_{xy}と荷重$p(x, y)$の釣り合い式

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial Y^2} = -p(x, y) \quad \cdots\cdots (1)$$

を基礎とする。

曲げたわみを$w(x, y)$、板の曲げ剛性をK とすると断面力は次のようになる。

$$M_x = -K\ (w_{xx} + \nu w_{yy})\ ,\ M_y = -K\ (w_{yy} + \nu w_{xx})\ ,\ M_{xy} = -(1-\nu) K w_{xy} \quad \cdots\cdots (2)$$

ここで記述を簡素化するために本文のみにおける微分演算子Д, Жを採用すると、

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\ ,\quad Д = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\ ,\quad Ж = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \quad \cdots\cdots (3)$$

断面力と式(1) は次のように表されることになる。

$$M_x = -\frac{K}{2}\{(1+\nu)\Delta + (1-\nu)Д\}w\ ,\quad M_y = -\frac{K}{2}\{(1+\nu)\Delta - (1-\nu)Д\}w$$
$$M_{xy} = -(1-\nu) K Ж w \quad \cdots\cdots (4)$$

$$\frac{(1+\nu)}{2}\Delta(K\Delta w) + \frac{(1-\nu)}{2}Д(KДw) + 2(1-\nu)Ж(KЖw) = p(x, y) \quad \cdots\cdots (5)$$

厚さの変わる板の微分方程式をこのような形に表現するのは差分法によって微分方程式を行列表示する場合の便宜を計る為である。

2 行列表示

厚さの変わる板の微分方程式を行列表示で具体的に表現するには、単純支持辺・固定辺あるいは自由辺に対する境界条件を必要とする。具体的な各論は省略して簡単に述べるが、式(1) の左辺は次のように行列の積の形で表現されることが分かる。

式(5) の微分方程式が行列表示ではどのようになるかを概説しよう。式(3) で定義されている2階微分演算子Δ, Ж, Дは境界条件を含めて差分法によって行列表示されて、式(5) の各項はそれぞれ次のように表現される。

$$\frac{(1+\nu)}{2}\Delta(K\Delta w) = H_1^T D_1 H_1\ \{w_{ij}\}\ ,\quad \frac{(1-\nu)}{2}Д(KДw) = H_2^T D_2 H_2\ \{w_{ij}\} \quad \cdots\cdots (6)$$
$$2(1-\nu)Ж(KЖw) = H_3^T D_3 H_3\ \{w_{ij}\}$$

ここに D_j は板の各点（差分網目代表点）の剛性を表す対角行列であって、

D_1は $\frac{(1+\nu)}{2}K$を、D_2は $\frac{(1-\nu)}{2}K$を、D_3は $2(1-\nu)K$を対角要素とする対角行列である。

また、H_j は必ずしも正方行列ではなく H_1は微分演算子Δを、H_2は微分演算子Дを、H_3は微分演算子Жを境界条件を加味して差分で表現した矩形行列である。

この場合の Stiffeness matrix S_1は

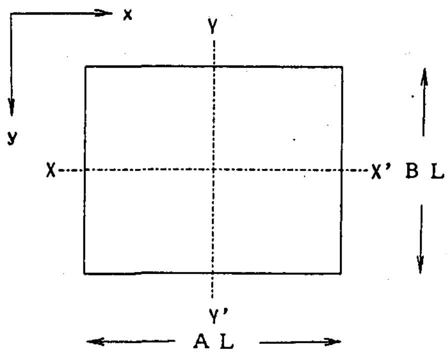
$$S_1 = H_1^T D_1 H_1 + H_2^T D_2 H_2 + H_3^T D_3 H_3 \quad \cdots\cdots (7)$$

ではあるが、一般化された Stiffeness matrix S_2を構成すると次のようになる。

$$S_2 = \begin{bmatrix} H_1^T & H_2^T & H_3^T \\ P^T & & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & P \\ H_2 & \\ H_3 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_U^T & A_L^T \\ P^T & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_U & 0 \\ 0 & D_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_U & P \\ A_L & E \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (8)$$

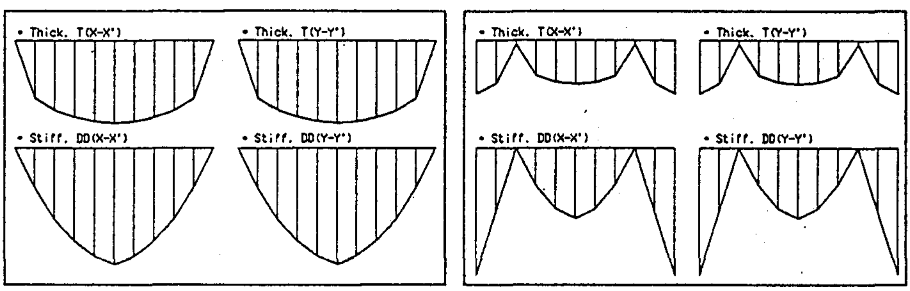
厚さが変わる板の固有値の逆数和Γ（固有周期の二乗和）を極値にする断面変化状態は、この一般化された剛性行列の因数分解式(8) を用いて求めるのである。

3　計算例：　支持条件が、４辺単純支持辺　，４辺固定辺の長方形板に対する適用例を示す。

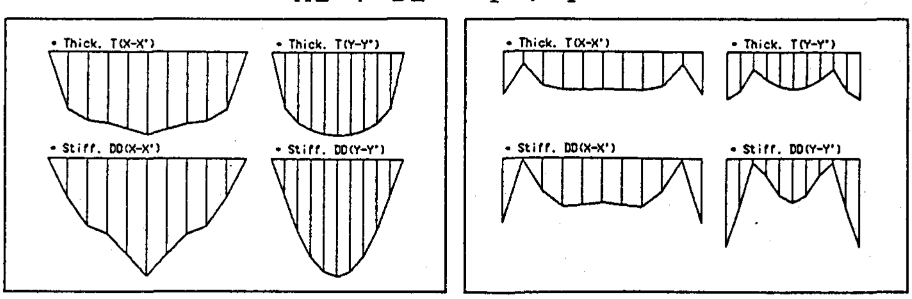


Thick. ：板厚
Stiff. ：剛性

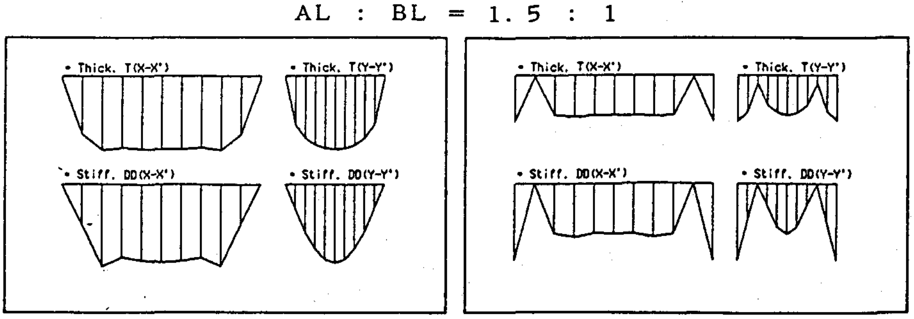
単純支持　　　　　　固定辺



AL ： BL ＝ 1 ： 1



AL ： BL ＝ 1.5 ： 1



AL ： BL ＝ 2 ： 1