固有周期を極小化する構造物の設計方法に関する基礎的な研究

○ 岐阜大学　学生員　パナヨット・サーベス
滝上工業　正会員　安　藤　浩　吉
岐阜大学　正会員　中　川　建　治

1 Stiffeness matrix の因数分解

本研究は、構造物の建設材料の総重量を一定に保ったままで固有周期の二乗和を最小にする断面設計法を導いたものである。固有値の逆数和を最小にすることの工学的意義は、構造物の自由振動周期Tjの二乗和を最小にすることであって動的に『固い構造物を設計すること』である。

一般の構造物を変形法を用いて解析する場合の Stiffeness matrix をSと定義するとSは3つの要素行列の積に因数分解される。

$$S = A^T D A \qquad \text{...........(1)}$$

ここに、Dは部材の断面形状、剛性と長さ等を表す対角行列であり、Aは構造物の部材の幾何学的な構成を表す正方行列であって部材の剛性や断面形状に無関係である。静定構造物ではAは(nxn)の正方行列であるが、不静定構造物では(mxn)の矩形行列となる（行数m ＝列数n+r、rは不静定次数）。

Flexibility matrix Fは、A, Dが共に正方行列であるなら逆順の法則によって

$$F = S^{-1} = (A^T D A)^{-1} = A^{-1} D^{-1} A^{T-1} \qquad \text{..........(2)}$$

と表されるが、Aが矩形行列であれば要素に分解したままでA^{-1}を求める事は不可能になるので一般化したStiffenness matrix S_1を次のように定義する。すなわち、式(1)の因数行列A，Dを次のように正方行列A_U, D_U, D_Lと矩形行列A_Lに分解して表す。

$$A = \begin{bmatrix} A_U \\ A_L \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} D_U & 0 \\ 0 & D_L \end{bmatrix} \qquad \text{............(3)}$$

A_U : (n x n)の正方行列でAの上部n行、　D_U : (n x n)対角行列でDの上部対角行列
A_L : Aの下部r行の(r x n)矩形行列、　D_L : (r x r)対角行列 でDの下部対角行列

このようにすると不静定構造の場合の剛性行列S_1は次のように表される。

$$S_1 = A_U^T D_U A_U + A_L^T D_L A_L \qquad \text{....................(4)}$$

ここで因数である矩形行列Aを拡張して正方行列A_2を定義して、これを因数にする一般化された Stiffeness matrix S_2を定義しよう。　行列Aに対して

P：任意の(n x r) 小行列、Q：任意の(r x r) 小行列　.............(5)

を設定して

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_U & P \\ A_L & Q \end{bmatrix} \qquad \text{...............(6)}$$

とすると

$$S_2 = A_2^T D A_2 \qquad \text{............(7)}$$

$$= \begin{bmatrix} A_U^T D_U A_U + A_L^T D_L A_L & A_U^T D_U P + A_L^T D_L Q \\ P^T D_U A_U + Q^T D_L A_L & P^T D_U P + Q^T D_L Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & C \\ C^T & R \end{bmatrix}$$

となるが、もし

$$C = A_U^T D_U P + A_L^T D_L Q = 0 \qquad \text{...............(8)}$$

であればS_2は正方行列S_1とRを主小行列とする対角大行列となる。PとQとは任意であり、Rも任意で良いからQ＝Eとして式(8)をPについて解けばA_2が確定してS_2^{-1}が正方行列の積となる。

$$P = -D_U^{-1} A_U^{T-1} A_L^T D_L = -D_U^{-1} (A_L A_U^{-1})^T D_L \qquad \text{................(9)}$$

$$S_2^{-1} = (A_2^T D A_2)^{-1} = A_2^{-1} D^{-1} A_2^{T-1} \qquad \text{...............(10)}$$

ここで注目しなければならないのは、A_2は剛性を表す対角行列Dに対して従属する事である。

2 固有値の逆数和について

実対称行列Sに対して重み行列Wを以て直交する行列Vによる固有値行列［λ］を

$$V^T S V = [\lambda] 、\quad V^T W V = E \qquad \text{............(11)}$$

と表現すると、$(V^TSV)^{-1}=V^{-1}S^{-1}V^{T-1}=[\lambda^{-1}]=V^TWS^{-1}WV$ ......(12)
となる。 任意の行列Hの対角元の和（行列Hのトレース Trace(H)）に関しては、任意の行列Cに対して $\mathrm{Trace}(H)=\Sigma h_{kk}=\mathrm{Trace}(CHC^{-1})$ ....(13)
が常に成立する。この関係を行列Sの固有値λに適用すると次のようになる。

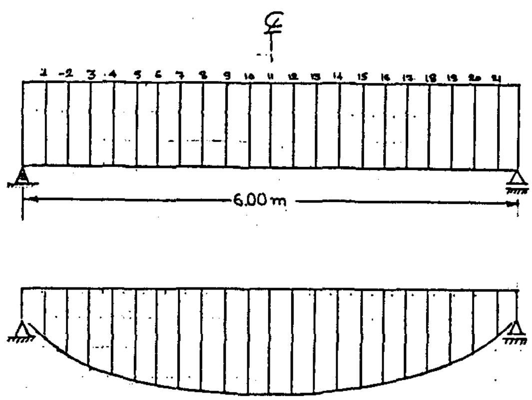
$\Sigma(1/\lambda_k)=\mathrm{Trace}([\lambda^{-1}])=\mathrm{Trace}(V^TWS^{-1}WV)=\mathrm{Trace}(S^{-1}W)$ ....(14)

これらの結果より得られる重要な結論は次のようなことである。
『行列Sの固有値は煩雑な固有値計算を行なわなければ得られないが、固有値の逆数和は逆行列$S^{-1}=F$より直ちに得られる。もしSが一般化された剛性行列であれば対角元の和は上位より n 個を採り、下位 r 個は放棄すれば良い。』 重み行列Wが対角行列（振動問題の場合）であれば

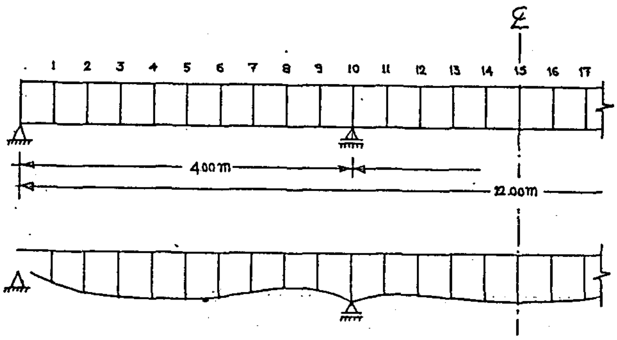
$\Sigma(1/\lambda_k)=\Sigma(f_{kk}w_k)=\mathrm{Trace}(A_2^{-1}D^{-1}A_2^{T-1}W)$ ....(15)

となる。建設材料の総重量（総体積）Vを一定にする条件で固有値の逆数和を最小にする最適断面の決定はラグランジュの未定係数法を用いて繰り返し計算する手法が適当である。

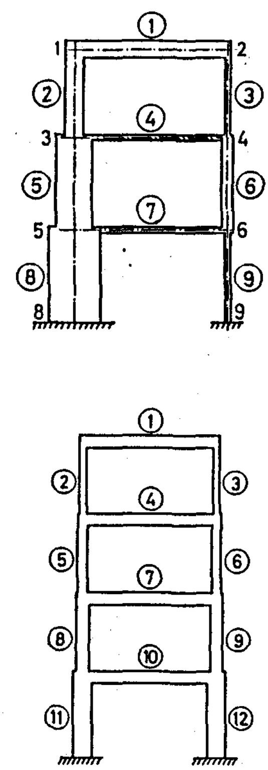
3 計算例： 単純梁、連続梁、1スパンラーメンに対する適用例を示す。



図−1 単純梁の最適断面変化



図−2 連続梁の最適断面変化



図−3 ラーメン構造の最適断面
（各梁と柱はそれぞれ等断面）