非対称分岐点における分岐方向の探索方法について

岐阜大学　学生員　○広瀬康之
岐阜大学　正　員　　藤井文夫

1．レビュー　骨組・曲面構造の分岐問題は最も難解な安定問題のひとつである。分岐解析に特有な問題点をまとめるとつぎの3点に絞られる：①分岐点の接近をどうモニターするか②分岐点の位置をどう正確に捉えるか③分岐方向をどう評価するか。このうち③については，必ずしも分岐経路に接する正確な接線ベクトルである必要はなく，結果的に現在の追跡経路から分岐経路にスムーズに移行できれば近似的なものであっても構わない。対称分岐問題の分岐方向は，分岐点で現在追跡中の経路に関する接線剛性行列（特異行列）のゼロ固有値に対する固有値ベクトルの方向と一致することがすでに知られている。しかし二次経路が対称分岐点を有する問題においても，一旦一次経路から二次経路に移行し，再び一次経路にもどるとき，分岐方向としての一次経路方向は二次経路に関する接線剛性行列のゼロ固有値に対する固有値ベクトル方向とはもはや一致しない。さらにより一般的な非対称分岐点については全く未解決のままで，分岐点より試行錯誤的に接線ベクトルを伸ばし五里霧中のまま分岐方向を探索しているのが現状であり，多くの研究は単に初期不整を与えて計算することにより，あえてこれらの問題を避けている感がある。わが国におけるこの方面の先駆的な研究に，細野の論文[1]があるが，分岐ベクトルは全く試行錯誤的に探索しているに過ぎず，反復手続きについての方針が明確に示されていない。Ｒｉｋｓ[3]は，一般的な分岐方向を，現在ある経路の接線ベクトルとゼロ固有値に対する固有値ベクトルの線形結合として求めたが，両者の比はポテンシャルエネルギーの3階微分に依存し，増分一次式のみを使って計算する場合は，摂動法と同様実用的ではない。実用分岐解析では，まず最初にこれまで辿ってきた経路との直交方向に分岐方向を予測するが，これは単に再びもとの経路に戻って欲しくないとゆう願いからそうするに過ぎない。これで正しい分岐方向が見つからなかった場合は，つぎはどうするかと言うことについては全く任意性がある。本研究は，増分一次式のみを用いて分岐方向を探索する実用計算方法を考察する。試行錯誤的ではあるが，確実に分岐方向を発見できる手順を目標とした。

2．　探索方法　自由度Ｎの構造系において，荷重変数λをも加えて未知量を合計Ｎ＋１とする。これに対して決定条件式はＮ本である。Ｎ＋１次元空間の解曲線ｓの一次経路に沿って０→Ａ→Ｂ（分岐点）まで追跡できたとする（Fig.1）。荷重変数を固定して$\lambda=\lambda_B\pm\Delta\lambda$平面を設定する（固定する変数は必ずしも荷重変数である必要はない）。分岐点Ｂをλ軸に平行に$\Delta\lambda$だけ移動させλ＝一定の平面上に点Ｂ’をとる。この点Ｂ’の座標はもはやＮ本の支配方程式を満足しない。一変数を規定したので，Ｎ個の変数に対して，Ｎ本の条件式を解くとその解は，分岐点近傍ではλ平面と，各経路との交点であるＡ，Ｄの位置を与える。これらの交点のある方向を求めるために，Ｎ本の条件式からどれか一本を除外して（全部でＮ通りの除外の仕方がある），Ｎ個の未知量が満たすＮ－１本の条件式で示される解曲線ｔを今度はＮ次元空間で考える。この解曲線ｔの接線ベクトルは接線方程式の係数行列の行列式計算（連立方程式の解法）で容易に判る。点Ｂ’は必ずしも解曲線ｔ上にはないが，点Ｂ’の座標を用いて得られたｔの接線ベクトルは，つぎのいずれかである。④ゼロベクトルとなる。⑤もとの経路の方向Ａを向いている。⑥もとの経路以外の方向を向いている。④はすぐ判る。⑤は得られた接線ベクトルと既知ベクトル（Ａ→Ｂ＋Ｂ→Ｂ’）との内積で判断できる。２本のベクトルが平行に近かったらＢ’→Ａと追跡するのは止める。⑥が分岐経路を目指している可能性が強いので⑥の接線ベクトル方向に探査を続ける。分岐点遠方において，設定平面と解曲線ｓとの交点Ａ’，Ｄ’も存在するが，接線ベクトルがたとえこれらの方向を指したとしても，多次元空間での距離を考えれば点Ａ’，Ｄ’は常識的に除外できる。ある特定の変数についての一定平面を設定するのにＮ＋１通り，除外する条件式の候補はＮ通りあるので，全部で（Ｎ＋１）×Ｎ通りの接線ベクトルが得られるが，実際には全てのものについて調べる必要はない。あるひとつの変数平面を固定し，最初の数本の接線ベクトル

について④⑤⑥を検討すれば分岐経路方向を示す接線ベクトルに出会える。

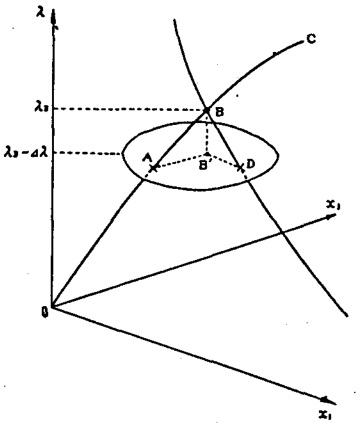

Fig.1 探索方法

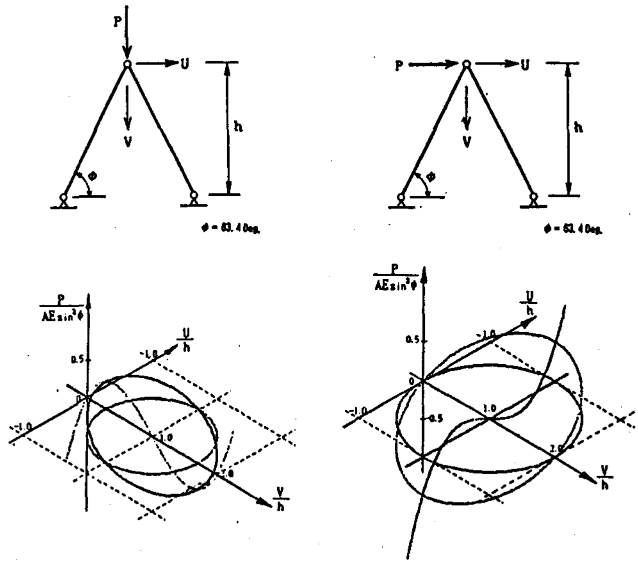

Fig.2 2-bar truss

3．計算例 以上の分岐経路の探査方法の妥当性について，簡単な力学系について解析的に検討してみた。Fig.2 はよく引用される 2-bar trussで，Pecknold[4] らもこの力学系の安定問題について論じている。原点を出発する解曲線の一次経路は，鉛直（水平）荷重の場合，最初の分岐点は対称（非対称）分岐となる。二次経路に分岐後再び一次経路に戻る分岐点では，二次経路からみると一次経路は非対称（対称）分岐となっている。いずれの分岐点でもこれから移行すべき経路方向は確実に検出できた。その他の骨組構造系については当日発表予定である。

4．結び ①対称分岐・非対称分岐の区別は，分岐座屈後の構造系の変形の対称・非対称とは全く無関係で，単に分岐点を通過する解曲線の分枝の形状によって決まるものである。また同じ分岐点についても，どの方向から（どちらの分枝から）分岐点に近づくかによって対称分岐・非対称分岐の呼称が逆転する。これが原因で対称分岐・非対称分岐，および基本経路・分岐経路の呼称について多少の混乱がみられることがある。②今後多くの計算例を計算して，どの変数を固定し，どの条件式を除外したら最も早く分岐方向を指す接線ベクトルに出会えるか検討する必要がある。

参考文献

(1) 細野透，"弧長法による弾性座屈問題の解析（その１，その２）"，建築学会論文集，第２４２，２４３号，昭和５１年

(2) Riks,E. "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems", Int. J of Solids and Structures, 15, 529-551, 1979

(3) Riks,E. "Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 47(1984),219-259

(4) Pecknold, D.A. Ghaboussi, J., and Healey,T.J. "Snap-through and bifurcation in a simple structure", EM, Proc. ASCE., No.7, Vol.111, 1985, 909-922