つり合い曲線上の分岐点のモニタリングとその算定

岐阜大学　学生員　○大塚雅裕
岐阜大学　正　員　　藤井文夫

1．はじめに　有限変位理論において，つり合い経路上に現れる分岐点や，特定の変数についての折り返し点（例えば荷重変数に関する極大点など）の接近をあらかじめ予測することはつぎの理由から重要である。●目標とする分岐点・極大点までのある種の「距離（誤差）」の目安とできる。●非線形計算において弧長刻み幅をより小さくするなどの対策を事前に取ることにより，特異点の位置や最大耐荷力をより精度良く評価することができる。●現在ある解曲線上の点が分岐点であるか、折り返し点であるかの判別をする必要がある。●分岐点である場合，現在追跡中の経路から分岐経路に移行するための必要な手続きを開始できる。この分岐点の接近を感知する手続きはモニタリングと呼ばれるが、このためには判断の基準となる何らかのsingle parameterを計算しながら解曲線を追跡して行くこととなる。これまでおおくのpath-related measureが提案されてきた(3)。例えばBergan(4) のcurrent stiffness，接線剛性行列の行列式，静的・動的固有値などがあるが、パラメータの変化状況が問題に応じて複雑であったり（Fig.1），分岐点と極大点とを判別できなかったり，できたとしても固有値解析のように多くの計算量を必要とするなど一長一短である*。そこで本研究は，計算が容易で分布状況が安定で，分岐点と荷重極大点をも識別できる能力をもつモニタリング用のつぎのようなスカラ　パラメータを提案する。

2．モニタリングパラメータ　一般に構造系の全体量に対する非線形支配方程式

$$F_j\ (X_k) = 0 \qquad \text{式 (1)}$$

を解曲線に沿う弧長sで微分して，つぎのような接線（増分）方程式を得る。

$$[\partial F_j / \partial X_k]\ dX_k / ds = 0 \qquad \text{式 (2)}$$

ここに，n個の自由度を有する系については $j=1\sim n$，$k=1\sim n+1$ で，荷重変数を X_{n+1} とする。式（2）はn＋1個の未知量 dX_k/ds に対するn本の条件式であり，一見して条件式が1本不足していることになる。しかし式（1）を満たす解曲線上の或る特定の点を一義的に決めるのではなく，連続的な解曲線を追跡するのであればこれで条件式は足りる。式（2）の解 dX_k/ds は解曲線上の任意点における単位接線ベクトルのスカラ成分となる。そこで，分岐点においてはこの接線ベクトルが不定となることより，つぎのモニタリングパラメータを提案する。

$$Z_B = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\det\,[\partial F_j / \partial X_{k(i)}]\right)^2 \qquad \text{式 (3)}$$

ここに，$[\partial F_j / \partial X_{k(i)}]$ は $[\partial F_j / \partial X_k]$ の第i列を消去してできる正方行列である。荷重極大点は単に

$$Z_T = dX_{n+1} / ds \qquad \text{式 (4)}$$

をモニターすればよい。分岐点では $Z_B=0$，$Z_T=0$，極大点では $Z_B\neq 0$，$Z_T=0$，となる。式（3）の計算にはn＋1個の行列式が必要となるが、実際には個々の行列式を一つ一つ求める必要はなく，あるひとつの非ゼロ行列式をまず最初に計算し，あとは式（2）の長方形行列の対応する列に掛け，右辺に移行して連立方程式を解くだけで残りのn個の行列式が容易に求まる。

3．補間探索　これまで文献のなかで提案されているモニタパラメータは種々の分布形態を示す(Fig.1)。

****

＊本研究を進めている間，Eriksson(2) がかなり有望な2つのstiffness measure を発表しているが、これについては，本報のなかで考慮することができなかった。

このうち分岐点検出に最も有利なのが固有値のような直線交差型である。接線剛性行列の行列式は多くの場合直線交差型となるが，問題により極値型になることもある[1]。ゼロ固有値に対応する固有ベクトルと荷重列ベクトルとの内積は，分岐点と荷重極大点とを判別できるが，分岐点付近で不連続に近い分布となる。本研究で提案するZ_Bは，常に正値で極値型となるが，この分布を分岐点付近での2点s_1とs_2におけるZ_{B1}，Z_{B2}を用いて放物線補間（未知係数3個）し，$s=\xi(\Delta s)$にある分岐点で$\dot{Z}_B = dZ_B/ds$ ＝0の条件からξがつぎのように決まる。

$$\xi = \left(Z_{B1} \pm \sqrt{Z_{B1} Z_{B2}} \right) / \left(Z_{B1} - Z_{B2} \right) \qquad \text{式 (5)}$$

ここで，分岐点がs_1とs_2とで挟まれるとき負符号，分岐点がs_2の前方にあるとき正符号となる。Z_Bが充分に小さくなったとき，以上の分岐点探査を始め，式（5）を繰り返し適用して正確な分岐点の位置を求める（Fig.2)。

4．例題　多自由度系については講演当日発表するとして，まず簡単な2自由度の力学系について提案したモニタリングパラメータと分岐点の探索方法の妥当性について検討した。Fig.3 はトラスの不安定対称分岐の例である。基本経路をまず軌道追跡型の非線形解法で追跡し，同時にZ_Bの基本的変化を経路に沿って調べたものである。分岐点の正確な位置は3次元空間で (u,v,p)=(1/3,0,1/3) となるが，これは式（5）を用いた探査方法でも容易に評価できた。

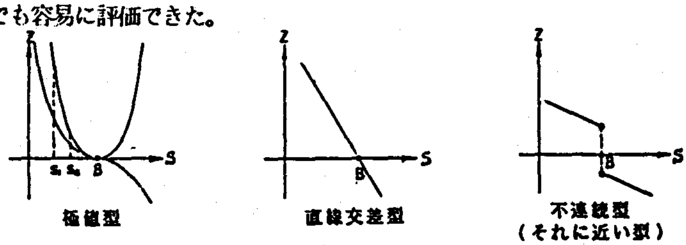

Fig.1 モニタリングパラメータの変化

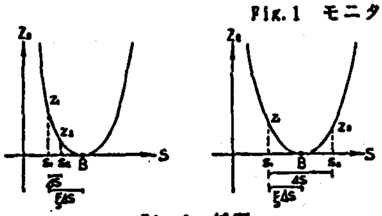

Fig.2 補間

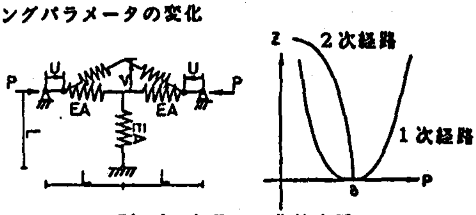

Fig.3 トラスの分岐座屈

5．まとめ　分岐点の正確な位置の評価に欠くことのできないモニタリングと分岐点の探索方法について提案を行った。今後，殻構造系についても検討してみる必要がある。分岐点の位置が求まって，これまでの経路から分岐経路の移行する計算技法については，分岐方向の評価方法に関する別報を参照されたい。徳島大学工学部篠原能材教授からいただいた応用数学的なアドバイスに感謝する次第である。

参考文献

〔1〕Brendel,B.K. und Ramm, E,"Nichtlineare Stabilitätsuntersuchungen mit der Methode der finiten Elemente", Ingenieur-Archiv, 51, 337-362, 1982

〔2〕Eriksson,A,"On some path-related measures for nonlinear structural FE problems",IJNME., vol. 26, 1791-1803,1988

〔3〕Waszczyszyn,Z,"Numerical problems of nonlinear stability analysis of elastic structures", CAS, vol.17, No. 1, 13-24, 1983

〔4〕Bergan,P.G. and Soreide, T.H.,"Solution of large displacement and instability problems using the current stiffness parameter",In Finite Elements in Nonlinear Mechanics, pp 647-. 669, Tapir Press, Trondheim,1978