非線形全体・増分方程式の解法のための軌道追跡型スキームについて

岐阜大学　学生員　○倉坪和弥
岐阜大学　正　員　　藤井文夫

1．まえがき　非線形構造解析において支配方程式をいかにして導くかと言うことと，その支配方程式をいかにして解くかと言うこととは本質的に異なる問題である。非線形スキームに乗せやすい（解き易い）方程式が得られるようあらかじめ定式化の段階で工夫することも可能であるが，両者はやはり原則的には別個のスキルが要求される問題である。実際の非線形計算においては，高度な定式化によって得られる支配方程式であればある程，その数値解法のプログラミングや反復計算において苦労することが通例である。非線形方程式の数値解法については数多くのスキームが提案されているが，解曲線の形状がきわめて複雑になり，変数間で一対一の対応がなくなり相互に多価関数となるような問題がある。このような非線形問題の解を求めるためには通常の単純な解法手段ではなく，Riks／Wempner（弧長増分法）(3,5) やHaisler/Stricklin（変位制御法）(4) らの解法のような汎用性のあるいわゆる「軌道追跡型」の解法に依らなければならない。本研究では非線形構造解析のためのひとつの「軌道追跡型」解法を提案する。非線形構造問題では全体方程式が求められることはむしろ稀で，増分方程式を支配方程式とする場合がほとんどである。そこで全体・増分方程式のいずれにも対応できるような算法を考案した。

2．計算理論の概要[1, 2]　非線形方程式を微分方程式の初期値問題に変換し，これを数値積分して行く積分過程と，数値積分解の誤差を除去する反復過程とを考える。n個の自由度を持つ系を考えると，まず積分過程における基礎式はつぎのようである。

全体量に対する支配方程式　$\{F\}=\{0\}$　式（1）

ここに列ベクトル$\{F\}$の各成分は変数$\{X\}$の非線形関数である。荷重パラメータは，（n＋1）番目の変数X_{n+1}とする。

接線（増分）方程式　$[f]\{dX/ds\}=\{0\}$　式（2）

ここに$[f]$の（j，k）要素は，$f_{jk}=\partial F_j/\partial X_k$で与えられる。sは解曲線の弧長で，$\{dX/ds\}$は，n＋1次元空間における解曲線の単位接線ベクトルである。

連立微分方程式　$dX_k/ds=+\nu(-1)^k\det[f^{(k)}]$　式（3）

fの右上添字の（k）は，k番目の列を除去することを意味し，$[f^{(k)}]$は正方行列となる。νは比例定数で，$\{dX/ds\}$が単位ベクトルであることより

$$\nu=\pm\left\{\sum_{k=1}^{n+1}\left(\det[f^{(k)}]\right)^2\right\}^{-1/2}\quad 式（4）$$

と決まる。式（4）の右辺の±は解曲線に沿う進行方向を表す。式（3）の数値積分解が解軌道より遊離した場合にはつぎの反復過程を挿入し，軌道修正を行う。

反復計算用の連立方程式　$[f^{(m)*}]\{dX^{(m)}\}^{ter}=\{\varepsilon^*\}$　式（5）

ここに$[f^{(m)*}]$と$\{dX^{(m)}\}^{ter}$の右上添字の（m）は，m番目の列と成分を除去することを，^{ter}は反復を意味する。（＊）は，最新の近似解$\{X^*\}$を用いて評価されることを意味する。

右辺の$\{\varepsilon^*\}$は誤差項で，

全体形式の場合　$\{\varepsilon^*\}=-\{F^*\}$　式（6）

増分形式の場合　$\{\varepsilon^*\}=-[f^*]\{dX\}$　式（7）

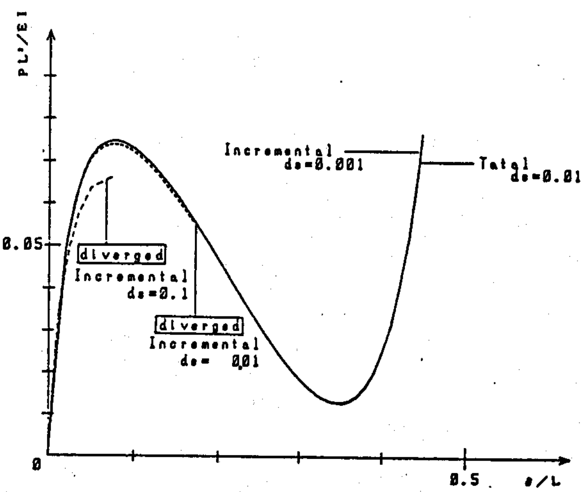
ただし，右辺の$\{dX\}$は，

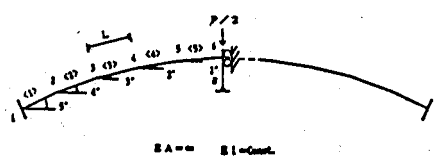
$$\{dX\} = \{dX\}^{teg} + \Sigma\{dX\}^{ter} \quad 式(8)$$

前stepにおける　　　増分量　　　補正量の総和
収束解からの変動量

である。$\{dX\}^{teg}$，$\{dX\}^{ter}$ はそれぞれ式（3）の積分過程，式（5）の反復過程において求められるベクトルである。

3．　計算例　全体・増分形式の非線形スキームを用いてsnap-throughを含む例題計算を行った。刻み幅ds=0.1，0.01の増分形式の解法は解曲線の追跡途中で発散した。ds=0.001の増分形式の解法は全体形式の解法（ds=0.01）に比べて多少誤差が蓄積する嫌いがあるが（特に解曲線の折り返し点において），弧長刻みを充分に小さく取るならば実用的に何ら問題なく使える。ルーピングのようなより複雑な解曲線の追跡にあたっては，より高次の積分公式を使うなどの対策が必要である。





4．まとめ　全体形式・増分形式のいずれの支配方程式にも適応できる非線形スキームを提案した。全体形式・増分形式の解法の違いは単に反復過程における連立方程式（5）の右辺に要求される誤差項のみである。本解法の特徴は一見して，(n+1) 個の未知量の間に存在する関係を，n 本の条件式のみを用いて決めるunderdeterminate的なアプローチである点である。解曲線上にある特定の点の座標を一義的に決めるのではなく，解曲線を連続的に追跡するだけならn個の条件式で充分である。

参考文献

〔1〕藤井文夫・今井康幸，『アーチのルーピングつり合い曲線の追跡に見る篠原法について』，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第12巻，1988年7月
〔2〕Fujii, F.,"A scheme for elasticas with snap-back and looping" , EM, Proc. of ASCE, 1989
〔3〕Riks, E.,"On the numerical solution of snapping problems in the theory of elastic stability", SUDAAR, No.401, Stanford Univ., 1970
〔4〕Haisler , W.E., Stricklin,J.A. and Key, J.E.," Displacement incrementation in nonlinear structural analysis by self-correcting method", Int. J. Numeri., Meth. in Engng., Vol. 11, 3-10, 1977
〔5〕Wempner,G.A.,"Discrete approximations related to nonlinear theories of solids", Int., J. Solids and Structures, Vol.7, 1581-1599, 1971