

軸変形及びせん断変形を考慮したエラスチカ問題の楕円積分解

名古屋工業大学 学生員 ○吉光 友雄
 名古屋工業大学 正員 後藤 芳顕
 名古屋工業大学 正員 小畑 誠
 名古屋工業大学 正員 松浦 聖

1. まえがき：平面棒材の有限変位問題の閉じた解が、楕円積分で表現されることは、古くからエラスチカ問題¹⁾の名で知られている。しかしながら、著者の知る限りにおいては、これらはすべて軸線の不伸張の仮定、ならびにせん断変形を無視した断面の直角保持の仮定を導入したもので、この両者の仮定をはずした解は言うまでもなく、いずれか一方の仮定をはずしたのも、軸線の伸張変形を考慮した著者の解²⁾以外には見当たらない。ここでは著者らによる軸線の伸張変形を考慮した楕円積分の解をさらに発展させ、軸線の変形ならびにせん断変形を考慮したチモシェンコはりの厳密な有限変位理論に対する楕円積分解の誘導に成功したので、その概要を報告する。

2. 支配方程式：有限変位問題におけるチモシェンコはりの厳密な支配方程式は、Reissner³⁾によって初めて提示されたが、構成則については2、3のものが報告されている。ここで用いる支配方程式は表-1に示すものであるが、構成則については各種検討した結果、閉じた解が誘導できるものとして、西野、長谷川⁴⁾らによるものを用いる。

3. 解の積分表示：Table-1の支配方程式を文献2)の方法で積分を行うと、Fig-1で示される*i*節点と*i+1*節点の物理量、いわゆる一般解が積分によってTable-2のように表される。ここで物理量はすべて無次元化されており、添字*i, i+1*が各節点に対応する諸量であることを示している。Table-2を見ると分かるように一般解は、2つの独立なパラメータとして細長比 λ と、軸剛性のせん断剛性に対する比 μ に支配されている。もしここで $\mu=0$ とするとその一般解はベルヌーイ・オイラーの仮定より導いた解と一致する。

4. 楕円積分標準形への変換：Table-2の積分を楕円積分標準形に変換する。変換手続きについては文献2)と同様であるので、簡単に説明する。まず f_1 をつぎのように書き直す。

$$f_1 = (a_0 + a_1 \cos \phi + a_2 \sin \phi + a_3 \sin \phi \cos \phi + a_4 \cos^2 \phi + a_5 \sin^2 \phi)^{1/2} \quad \dots (1)$$

ここで変数変換 $X = \tan \frac{\phi}{2}$ を行うことにより $I_1 \sim I_5$ は

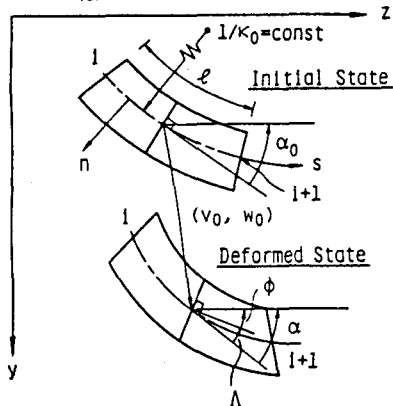


Fig.1 Geometry of the Initial and the Deformed Beam Element

Table-1. Governing Equation

Equilibrium Equation	Constitutive Relations
$\{N \cos(\alpha - \Lambda) - V \sin(\alpha - \Lambda)\}' = 0$ $\{N \sin(\alpha - \Lambda) + V \cos(\alpha - \Lambda)\}' = 0$ $M' - \sqrt{g_0}(V \cos \Lambda - N \sin \Lambda) = 0$	$N = EA(\sqrt{g_0} \cos \Lambda - 1)$ $V = kGA \sqrt{g_0} \sin \Lambda$ $M = -EI(\alpha' - \Lambda' + \kappa_0)$

Remarks: The following notations are used throughout tables

$$\bar{A} = \int_A \frac{1}{1 + \kappa_0 n} dA, \quad \bar{I} = \int_A \frac{n^2}{1 + \kappa_0 n} dA$$

Table-2. Integral Solutions

$I_1 = 1$ $\frac{V_{0i+1} + V_{0i+1}}{\lambda} = \frac{V_{0i} + V_{0i}}{\lambda} + \frac{(1-\mu)}{\lambda^2} (B_i I_4 + C_i I_5) + I_2 + C_i \frac{\mu}{\lambda^2}$ $\frac{W_{0i+1} + W_{0i+1}}{\lambda} = \frac{W_{0i} + W_{0i}}{\lambda} + \frac{(1-\mu)}{\lambda^2} (C_i I_4 - B_i I_5) + I_3 + B_i \frac{1}{\lambda^2}$ $A_{i+1} = A_i + C_i I_3 - B_i I_2 + \frac{(1-\mu)}{\lambda^2} \{ (C_i^2 - B_i^2) I_4 + C_i B_i (I_1 - 2I_6) \}$ $f_1 = -\text{sign}(A_i + \kappa_0 l) \{ (A_i + \kappa_0 l)^2 - 2C_i (\sin \phi - \sin \phi_i) - 2B_i (\cos \phi - \cos \phi_i) - \frac{(1-\mu)}{\lambda^2} \{ B_i C_i (\sin 2\phi - \sin 2\phi_i) + \frac{1}{2} (B_i^2 - C_i^2) (\cos 2\phi - \cos 2\phi_i) \} \}^{1/2}$	$B_{i+1} = B_i, \quad C_{i+1} = C_i$
---	--------------------------------------

Remarks: $A = \frac{M l}{EI}$, $B = \frac{F_z l^2}{EI}$, $C = \frac{F_y l^2}{EI}$, $\lambda = l / \sqrt{\frac{EI}{EA}}$, $\mu = \frac{EA}{kGA}$

$$I_j = \int_{x_1}^{x_{j+1}} \frac{R(x)_j}{f_2} dx \quad (j=1 \sim 5)$$

$$f_2 = (b_5 X^4 + b_1 X^3 + b_2 X^2 + b_3 X + b_4)^{1/2} \quad \dots(2 \cdot a, b)$$

の形になる。式(2・a)に示される積分が、楕円積分標準形の形で表されるとは知られている。これを文献2)に示される方法で、Table-3に示す楕円積分標準形に変換する。その結果初等関数の積分と、3種類の楕円積分標準形により、 $I_1 \sim I_5$ の積分は、次のように表すことができる。

$$I_1 \rightarrow \mathcal{F} \quad I_2 \rightarrow \mathcal{F} + \mathcal{E} + \mathcal{G} \quad I_3 \rightarrow \mathcal{F} + \mathcal{E} + \mathcal{G}$$

$$I_4 \rightarrow \mathcal{F} + \mathcal{E} + \mathcal{E} + \mathcal{G} \quad I_5 \rightarrow \mathcal{F} + \mathcal{E} + \mathcal{E} + \mathcal{G} \quad \dots(3 \cdot a-e)$$

$\mathcal{F}$ 、 $\mathcal{E}$ 、 $\mathcal{E}$ はそれぞれ第一種、第二種、第三種楕円積分標準形を表し、 $\mathcal{G}$ は初等関数の積分を表す。

5. 数値計算：軸力は、はりの幾何学的非線形に大きく影響を及ぼすので、計算例としては圧縮軸力及び引っ張り軸力が卓越する、2種類のFig2,3に示す構造物について解析した。結果として、荷重-変位曲線を細長比 $\lambda = 10$ 、100について図示し、さらに各図では軸剛性に対するせん断剛性の比 μ をパラメータとし $\mu = 0$ 、3、10に関して示している。

なお、 $\mu = 0$ はベルヌーイ・オイラーのはりを表す。これらより $\lambda = 10$ の場合 μ の影響が大きく、 μ が大きいほど剛性が低下している。一方 $\lambda = 100$ の場合には μ の影響はほとんど認められない。

<参考文献>

1) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere: Theory of Elastic Stability, 2nd. Ed. McGrawhill 1961

2) Y. Goto et al: Elliptic Integral Solutions for Extensional Elastica with Constant Initial Curvature, 土論集, No.386

3) E. Reissner: On One Dimensional Finite Strain Beam Theory, ZAMP, vol.23

4) T. Chaisophon et al: An Elastic Finite Displacement Analysis of Plane Beams with and without Shear Deformation, 土論集, No.368

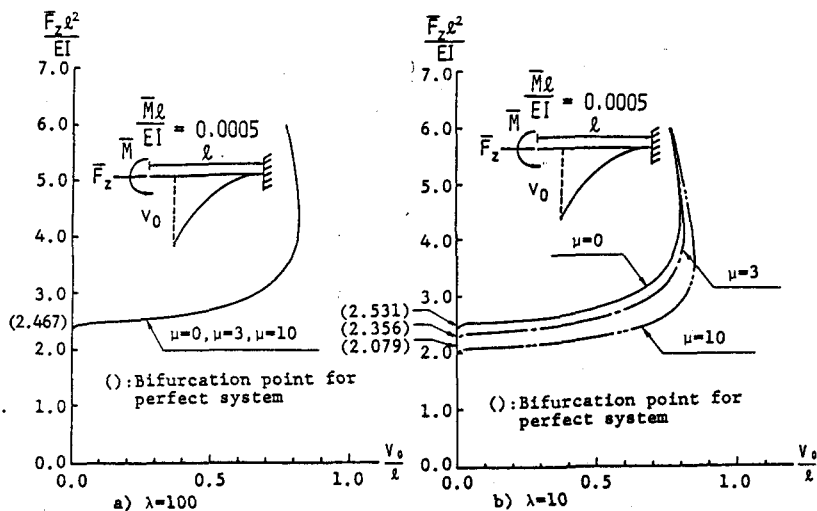


Fig-2 Cantilevers

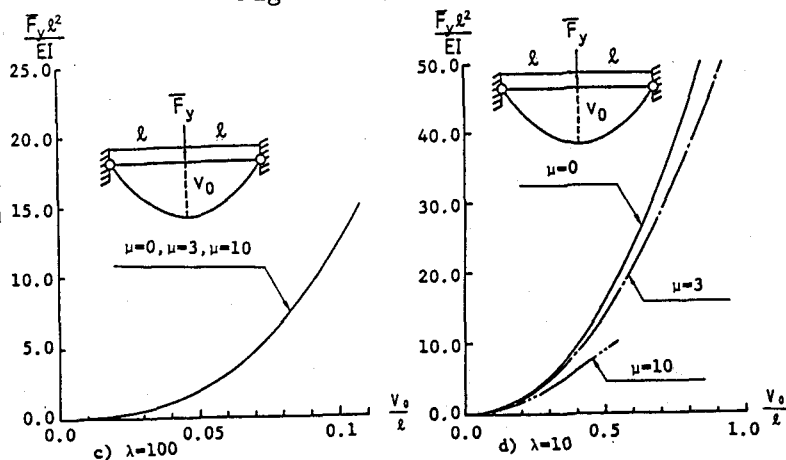


Fig-3 Beams with Hinged Ends