有限フーリェ級数による２次元境界要素法

信州大学工学部　正会員　○大上　俊之
同　　上　　正会員　　草間　孝志

１．まえがき

曲線境界を有する問題を境界要素法を用いて解く場合，物体の形状と未知量の関数形をできるだけ忠実に表現することによって，解の精度の向上を図ることができ，また節点数を少なくすることができる。そのため，従来２次要素，３次要素あるいはスプライン関数[1]等を用いた高次要素が広く用いられている。

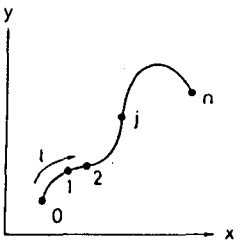
フーリェ級数は工学，科学分野において従来より幅広く用いられているが，有限フーリェ級数を内挿関数に用いた例としては，Chakrabarti の有限要素法の平板の解析[2]や，軸対称問題に対する応用等[3),4)]があるにすぎず，一般にはあまり用いられていない。　本研究は有限フーリェ級数による内挿関数の誘導と，その２次元境界要素法への応用ならびにその有効性について論じたものである。

２．有限フーリェ級数による内挿関数

いま，図－１に示すように境界上に０からｎまでのｎ＋１個の節点からなる任意の曲線要素について考える。　要素内の例えばｘ方向の変位ｕ(t)は，内挿関数Φ(t)を用いて

$$u(t)=\sum_{j=0}^{n}\Phi_j u_j \qquad (1)$$

と表される。内挿関数Φ(t)は既報５）より次のようになる。



図－１

ａ）ｎが偶数の場合

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_0(t)&=\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\left[\frac{1}{2}-t-\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\sin[(2t-1)\lambda_k]}{\sin\lambda_k}\right]+\frac{\cos(t\pi)}{2m}\\
\Phi_j(t)&=f_j(t)\quad(j=1,2,\cdots,n-1)\quad,\quad f_j(t)=\frac{\sin(n\zeta_j)}{m\sin\zeta_j}\cos\zeta_j\quad,\quad N=\frac{m}{2}\\
\Phi_m(t)&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\left[\frac{1}{2}+t+\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\sin[(2t+1)\lambda_k]}{\sin\lambda_k}\right]+\frac{\cos(t\pi)}{2m}\quad,\quad m=n
\end{aligned}\right\}\qquad(2-a)$$

ｂ）ｎが奇数の場合

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_0(t)&=\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\left[\frac{1}{2}-t-\sum_{k=1}^{N}\frac{\sin[(2t-1)\lambda_k]}{\sin\lambda_k}\right]\\
\Phi_j(t)&=f_j(t)\quad(j=1,2,\cdots,n-1)\quad,\quad f_j(t)=\frac{\sin(m\zeta_j)}{m\sin\zeta_j}\quad,\quad N=\frac{n-1}{2}\\
\Phi_m(t)&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\left[\frac{1}{2}+t+\sum_{k=1}^{N}\frac{\sin[(2t+1)\lambda_k]}{\sin\lambda_k}\right]\quad,\quad m=n
\end{aligned}\right\}\qquad(2-b)$$

ここに，$\zeta_j=(t-j)\pi/m$である。

式(2)は線形関係を包含するが，一方，いかなるｕｊに対しても，ｔ＝０，ｎで内挿関数Φの微係数が等しいことより要素の始点と終点で微係数ｄｕ／ｄｔが等しい。よって，$u_0=u_n$とおくと，連続な閉曲線境界に対しては妥当な内挿関数であるが開曲線には適切でない。そこで，いまあらためて内挿関数をΨとして

$$u(t)=\sum_{j=0}^{n}\Psi_j u_j \qquad (3)$$

と表せば，各ケースに対する内挿関数Ψの値が式(2) のΦを用いて表－１のように求まる。表－１のｃ，ｄは例えば円（楕円）等の４分の１部分の表現に，ｅはｘ（ｙ）軸に対称な曲線の内挿関数として有効である。

2．数値計算例

最初の計算例として，図－２に示すような単一楕円孔を有する平板に引張力が作用する場合について解析を行う。同図に分割図を示したが，対称性を考慮して，表－２に示す内挿関数を用いて，３要素９節点で解析した。長径比と図中のＡ点のσ_xとの関係を図－３に示す。比較のために同じ節点数の線形要素による結果も図示したが，有限フーリエ級数要素による解は厳密解に極めてよく一致していることが分かる。

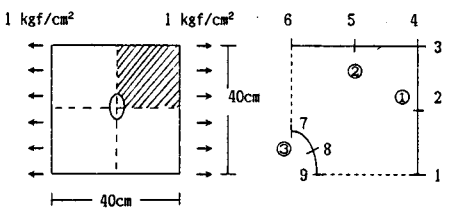
次にコンクリートの圧裂試験例として図－４に示すモデルを考える。前の計算例と同様，対称性より１／４部分だけを離散化する。なお，ここでは集中荷重を物体力の項として計算を行っている。図－５に垂直応力度の分布を理論解と比較して示す。この計算例の場合，８節点の離散化で精度よい解を得ることができた。

表－１　内挿関数

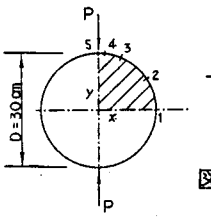
a．閉曲線要素の場合	$\Psi_j=\Phi_j$，　$m=n$，　$u_0=u_n$
b．開曲線要素の場合	$\Psi_j=\Phi_j-\Phi_{2n-j}$ $\Psi_n=1-\sum_{j=0}^{n-1}\Psi_j$，　$m=2n$
c．t＝0で du／dt＝0の場合	$\Psi_0=\Phi_0-\Phi_{2n}$ $\Psi_j=\Phi_j-\Phi_{2n-j}-\Phi_{2n+j}+\Phi_{4n-j}$ $\Psi_n=1-\sum_{j=0}^{n-1}\Psi_j$，　$m=4n$
d．t＝nで du／dt＝0の場合	$\Psi_0=1-\sum_{j=1}^{n}\Psi_j$，　$m=4n$ $\Psi_j=\Phi_j+\Phi_{2n-j}-\Phi_{2n+j}-\Phi_{4n-j}$ $\Psi_n=\Phi_n-\Phi_{3n}$，
e．t＝0とt＝nで du／dt＝0の場合	$\Psi_0=\Phi_0$，　$\Psi_j=\Phi_j+\Phi_{2n-j}$， $\Psi_n=1-\sum_{j=0}^{n-1}\Psi_j$，　$m=2n$

表－２　図－３の内挿関数

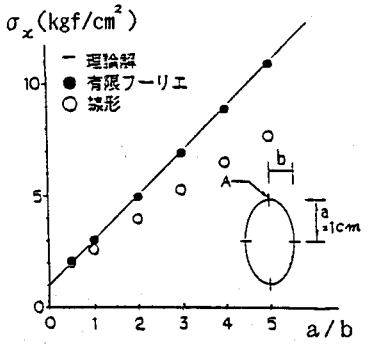
要素	x方向	y方向
①	c	b
②	b	d
③	d	c



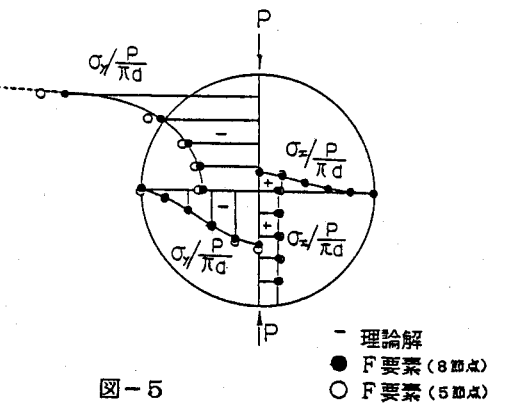
図－２



図－４



図－３



図－５

参考文献　1)Liggett,J.A. et al., Int.J.Num.Engrg., Vol.17, pp.543-556, 1981. 2)Chakrabarti,S., Int.J.Num.Meth.Engrg., Vol.3, No.2, pp.261-273, 1971. 3)Zienkiewicz,O.C. :The Finite Element Method Third Edition, McGraw-Hill(UK), 1977. 4)Krahula,J. et al., AIAA,J., Vol.6, No.4, pp.726-728, 1968. 5)荒川他，土木学会第41回年次学術講演会概要集，pp.51-52,1986.