I − 7

三次元軸対称Voigt型粘弾性体の過渡応力波伝播について

信州大学　正員　○石川　清志
赤堀　　裕
夏目正太郎

衝撃荷重を受ける二、三次元弾性体の動的問題はH.Lambを始め多くの研究者によって解かれてきている。この運動方程式は連立方程式と表されるが、連立方程式を直接扱わず、変位ポテンシャル(応力関数)を導入することによって連立性が排除された、波動方程式を解く問題に置き換えて行われている。更に、波動方程式の解析には、時間に対して、積分変換(Laplace変換)が導入され、空間のみに対する微分方程式を得、境界条件によって解かれている。しかしながら、積分変換を導入した式形は簡潔に表されるものの、逆変換の積分が一般に複素積分となり相当複雑になる。

ここでは三次元軸対称Voigt体の動的問題とし、衝撃荷重が負荷された場合の粘性減衰を表す過渡応力波伝播の形態を調べる。解析の特徴としては、偏微分方程式の常微分化にはHankel変換と、粘弾性体の動的解析に有用と思われるStokes法(変数分離)を導入し、固有関数の展開により、連立方程式となる運動方程式が直接的に解かれることを示す。

問題を簡単化するために、図-1に示すような円柱座標(r,θ,z)で表される幅2hの無限厚板とし、表面自由境界の中央に、圧縮応力波が誘起される対称部分分布荷重が負荷されるとする。Voigt体の運動方程式は、Lamé定数$(\lambda,\ \mu)$で表された弾性体の運動方程式に対して、λ、μをそれぞれ$(\lambda+\lambda'\partial/\partial\tau)$、$(\mu+\mu'\partial/\partial\tau)$の演算子で置き換えたものに相当する。ただし$\lambda'$、$\mu'$は粘性係数である。次の無次元量

$$\xi=r/h,\quad \eta=z/h,\quad \tau=c_2t/h,\quad \zeta=\varepsilon c_2/h,\quad b=\lambda/\mu\ (1<b) \tag{1}$$

を導入し、Voigt体の運動方程式、応力、及び境界条件、初期条件はHankel変換すれば次式となる。

$$\left.\begin{aligned}
&\left(1+\zeta\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left[\frac{\partial^2\tilde{u}_r}{\partial\eta^2}-\gamma^2(2+b)\tilde{u}_r-\gamma(1+b)\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial\eta}\right]=\frac{\partial^2\tilde{u}_r}{\partial\tau^2}\\
&\left(1+\zeta\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left[(2+b)\frac{\partial^2\tilde{u}_z}{\partial\eta^2}-\gamma^2\tilde{u}_z+\gamma(1+b)\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial\eta}\right]=\frac{\partial^2\tilde{u}_z}{\partial\tau^2}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}_{zr}=\frac{\mu}{h}\left(1+\zeta\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left[\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial\eta}-\gamma\tilde{u}_z\right]\\
&\tilde{\sigma}_{zz}=\frac{\mu}{h}\left(1+\zeta\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left[(2+b)\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial\eta}+\gamma b\tilde{u}_r\right]
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\eta=\pm1:\quad \tilde{\sigma}_{zr}=0,\quad \tilde{\sigma}_{zz}=-\tilde{p}(\tau) \tag{4}$$

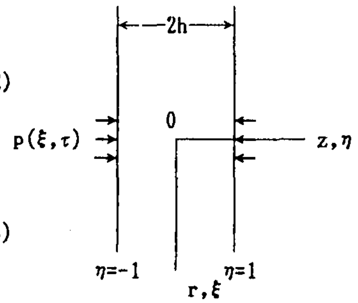

図-1. 無限厚板

$$\tau=0:\quad \tilde{u}_r=\tilde{U}_r(\eta),\quad \tilde{u}_z=\tilde{U}_z(\eta),\quad \frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial\tau}=\tilde{V}_r(\eta),\quad \frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial\tau}=\tilde{V}_z(\eta) \tag{5}$$

ここで、記号 ~ はHankel変換を表し、

$$\tilde{u}_r(\eta,\tau)=\int_0^\infty\xi u_r(\xi,\eta,\tau)J_1(\gamma\xi)d\xi,\quad \tilde{u}_z(\eta,\tau)=\int_0^\infty\xi u_z(\xi,\eta,\tau)J_0(\gamma\xi)d\xi,\quad \tilde{p}(\tau)=\int_0^\infty\xi p(\xi,\tau)J_0(\gamma\xi)d\xi \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{U}_r(\eta)\\ \tilde{V}_r(\eta)\end{bmatrix}=\int_0^\infty\xi\begin{bmatrix}U_r(\xi,\eta)\\ V_r(\xi,\eta)\end{bmatrix}J_1(\gamma\xi)d\xi,\quad \begin{bmatrix}\tilde{U}_z(\eta)\\ \tilde{V}_z(\eta)\end{bmatrix}=\int_0^\infty\xi\begin{bmatrix}U_z(\xi,\eta)\\ V_z(\xi,\eta)\end{bmatrix}J_0(\gamma\xi)d\xi \tag{7}$$

u_r、u_zはξ、η(またはr、z)方向の変位、σ_{zr}、σ_{zz}は剪断、及び直応力、pは分布衝撃荷重、U_r、U_zは初期変位、V_r、V_zは初期速度、εは粘性係数$(\varepsilon=\lambda'/\lambda=\mu'/\mu)$、$c_2=(\mu/\rho)^{1/2}$は横波伝播速度($\rho$は質量)、

J_0、J_1は0次、1次の第1種Bessel関数、γは演算子、tは時間である。式(2)を式(4)の境界条件、及び式(5)の初期条件で解くにあたり、変位$\tilde{u}_r$、$\tilde{u}_z$は次の級数で表されると仮定する。

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_r(\eta,\tau) \\ \tilde{u}_z(\eta,\tau) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(\tau) \begin{bmatrix} \phi_m(\eta) \\ \varphi_m(\eta) \end{bmatrix} \tag{8}$$

ここで、A_mは任意関数、関数ϕ_m、φ_mは固有関数で次の連立微分方程式を満足するものである。

$$\frac{d^2\phi_m}{d\eta^2}-\gamma^2(2+b)\phi_m-\gamma(1+b)\frac{d\varphi_m}{d\eta}=-\omega_m{}^2\phi_m,\quad (2+b)\frac{d^2\varphi_m}{d\eta^2}-\gamma^2\varphi_m+\gamma(1+b)\frac{d\phi_m}{d\eta}=-\omega_m{}^2\varphi_m \tag{9}$$

ただし、ω_mは任意定数(固有値)で弾性体の円振動数を意味する。これは、式(2)において、$\zeta\to0$とおき、$\tilde{u}_r=\phi_m\exp(i\omega_m\tau)$、$\tilde{u}=\varphi_m\exp(i\omega_m\tau)$としたものに相当し、弾性体の振動方程式とみることもできるからである。式(8)を式(3)に代入すれば、応力は

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{zr}(\eta,\tau) \\ \tilde{\sigma}_{zz}(\eta,\tau) \end{bmatrix} = \frac{\mu}{h}\sum_{m=1}^{\infty}(1+\zeta\frac{d}{d\tau})A_m(\tau)\begin{bmatrix} \Phi_m(\eta) \\ \Psi_m(\eta) \end{bmatrix},\quad \Phi_m(\eta)=\frac{d\phi_m}{d\eta}-\gamma\varphi_m,\quad \Psi_m(\eta)=(2+b)\frac{d\varphi_m}{d\eta}+\gamma b\phi_m \tag{10}$$

と表示されるから、式(9)の微分方程式に対する境界条件は式(4)を考慮すれば次式をとることになる。

$$\eta=\pm1:\quad \Phi_m=0,\quad \Psi_m=0 \tag{11}$$

式(9)の微分方程式において、ϕ_m、φ_mは式(11)の境界条件に対して、次の直交性の条件が成立する。

$$\int_{-1}^{1}(\phi_m\phi_n+\varphi_m\varphi_n)d\eta=0,\quad \omega_m\neq\omega_n \tag{12}$$

この条件を利用すれば、式(8)のA_mは次式で表すことができる。

$$A_m=\frac{1}{f_m}\int_{-1}^{1}(\tilde{u}_r\phi_m+\tilde{u}_z\varphi_m)d\eta,\ ここで、\ f_m=\int_{-1}^{1}(\phi_m{}^2+\varphi_m{}^2)d\eta \tag{13}$$

式(2)の運動方程式をϕ_m、φ_mで展開し、式(4)の境界条件で解くことになる。式(2)の各項は次の組合せによってそれぞれ級数で展開する。

$$(1+\zeta\frac{\partial}{\partial\tau})\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\begin{bmatrix} \tilde{u}_r \\ (2+b)\tilde{u}_z \end{bmatrix}=\sum_{m=1}^{\infty}B_m(\tau)\begin{bmatrix} \phi_m(\eta) \\ \varphi_m(\eta) \end{bmatrix},\quad \gamma^2(1+\zeta\frac{\partial}{\partial\tau})\begin{bmatrix} (2+b)\tilde{u}_r \\ \tilde{u}_z \end{bmatrix}=\sum_{m=1}^{\infty}C_m(\tau)\begin{bmatrix} \phi_m(\eta) \\ \varphi_m(\eta) \end{bmatrix},$$

$$\gamma(1+b)(1+\zeta\frac{\partial}{\partial\tau})\frac{\partial}{\partial\eta}\begin{bmatrix} \tilde{u}_z \\ -\tilde{u}_r \end{bmatrix}=\sum_{m=1}^{\infty}D_m(\tau)\begin{bmatrix} \phi_m(\eta) \\ \varphi_m(\eta) \end{bmatrix},\quad \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\begin{bmatrix} \tilde{u}_r \\ \tilde{u}_z \end{bmatrix}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d^2A_m}{d\tau^2}\begin{bmatrix} \phi_m(\eta) \\ \varphi_m(\eta) \end{bmatrix} \tag{14}$$

B_m, C_m, D_mは式(13)のA_mと同様に、式(12)の直交性の条件を利用すれば求め得られ、式(4)、(11)の境界条件、及び式(9)、(13)の関係式から、式(2)の運動方程式は展開された時間のみの方程式となる。

$$B_m-C_m-D_m=\frac{d^2A_m}{d\tau^2},\quad または\quad \omega_m{}^2(1+\zeta\frac{d}{d\tau})A_m+\frac{d^2A_m}{d\tau^2}=-q_m(\tau) \tag{15}$$

この方程式に対する初期条件は式(5)から、

$$\tau=0:\quad A_m=E_m,\quad \frac{dA_m}{d\tau}=F_m \tag{16}$$

ただし、q_m、E_m、F_mは次式のものである。

$$q_m(\tau)=\frac{h}{\mu}\frac{\tilde{p}(\tau)}{f_m}[\varphi_m(1)-\varphi_m(-1)],\ E_m=\frac{1}{f_m}\int_{-1}^{1}[\tilde{U}_r(\eta)\phi_m+\tilde{U}_z(\eta)\varphi_m]d\eta,\ F_m=\frac{1}{f_m}\int_{-1}^{1}[\tilde{V}_r(\eta)\phi_m+\tilde{V}_z(\eta)\varphi_m]d\eta \tag{17}$$

ϕ_m、φ_mは式(9)の連立方程式を式(11)のもとで解けば決定されるが、この関数は円振動数を表す固有値方程式の根ω_mをとることになる。一方、A_mは式(15)を式(16)のもとで解けばこれで全て解決される。$\tilde{u}_r$、$\tilde{u}_z$、$\tilde{\sigma}_{zr}$、$\tilde{\sigma}_{zz}$は式(8)、(10)によって表されているから、これらに対するHankel逆変換の積分を行えば、変位、応力は求められる。