

球状欠陥の後方散乱場に及ぼす界面の影響

東海大学海洋学部 学生員 ○原田 秀樹

東海大学海洋学部 正 員 北原 道弘

1. はじめに

超音波を利用して材料内に存在する欠陥を精度よく検出しようとするとき、欠陥により散乱される弾性波の散乱特性を把握しておくことが重要となる。ここでは欠陥を球形と仮定し、球状欠陥と母体界面の接着状態に着目する。界面の接着状態を表現する1つのモデルを提案し、後方散乱場の一解析例を示す。

2. 解析モデル

Fig.1 に示すように、無限弾性母体中の球形インクルージョンを考える。母体とインクルージョンの界面は、スプリングで接合されているものとする。このスプリングは3成分を有し、単位面積当たりのスプリング定数を S_r , S_θ , S_ϕ とする。界面の法線成分のスプリング定数が S_r 、接線成分が S_θ と S_ϕ である。 $S_r = S_\theta = S_\phi$ である必要はないが、 S_r , S_θ , S_ϕ それぞれは界面上の各点で同一の値を持つものとする。また、Fig.1 に示した座標系において、入射波 $\underline{u}^i$ は x_3 軸方向に伝播する平面P波とする。

$$\underline{u}^i = \underline{e}_3 \exp(ik_L x_3)$$

このとき、問題は球座標 ϕ に独立（物理量が ϕ に依存しない）となる。

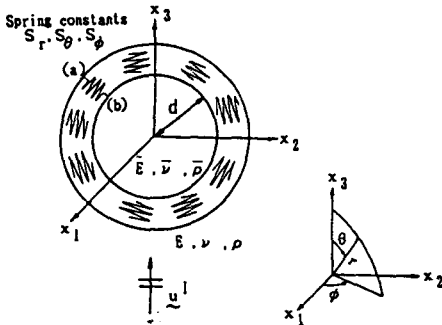


Fig.1 Scattering problem

3. スプリング界面の方程式

Fig.2 に示すように、スプリングの母体側を(a)、インクルージョン側を(b)とする。このときスプリングの式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \underline{S} & -\underline{S} \\ -\underline{S} & \underline{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}^a \\ \underline{u}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}^a \\ \underline{f}^b \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここに、

$$\underline{u}^a = (u_r^a, u_\theta^a)^T, \quad \underline{u}^b = (u_r^b, u_\theta^b)^T \quad (2)$$

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} S_r & 0 \\ 0 & S_\theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

である。

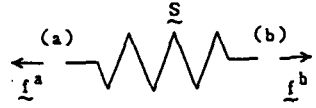


Fig.2 Spring model

界面上の力のつり合い条件は次のようになる。

$$\underline{f}^a = -\underline{t}^a, \quad \underline{f}^b = -\underline{t}^b \quad (4)$$

ここに

$$\underline{t}^a = (-\sigma_{rr}^a, -\sigma_{r\theta}^a)^T, \quad \underline{t}^b = (\sigma_{rr}^b, \sigma_{r\theta}^b)^T \quad (5)$$

である。ただし、界面の法線ベクトル $\underline{n}$ はインクルージョン側から母体側に向くように定義している。また、変位の連続条件は式(1)においてすでに考慮されている。

式(1)~(5)より、スプリング接触したインクルージョン界面の方程式は次のように書ける。

$$S_r u_r^a - S_r u_r^b - \sigma_{rr}^a = 0 \quad (6a)$$

$$S_\theta u_\theta^a - S_\theta u_\theta^b - \sigma_{r\theta}^a = 0 \quad (6b)$$

$$S_r u_r^a - S_r u_r^b - \sigma_{rr}^b = 0 \quad (6c)$$

$$S_\theta u_\theta^a - S_\theta u_\theta^b - \sigma_{r\theta}^b = 0 \quad (6d)$$

4. 球座標における一般解

$u_r^a, u_\theta^a, u_r^b, u_\theta^b, \sigma_{rr}^a, \sigma_{r\theta}^a, \sigma_{rr}^b$ の一般解は次のようになる。

$$u_r^a = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \{ \psi_0 i^n (2n+1) E_{71}^{(1)}(\alpha) + A_n E_{71}^{(3)}(\alpha) + B_n E_{72}^{(3)}(\beta) \} P_n(\cos \theta) \quad (7a)$$

$$u_\theta^a = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \{ \psi_0 i^n (2n+1) E_{81}^{(1)}(\alpha) + A_n E_{82}^{(3)}(\alpha) + B_n E_{82}^{(3)}(\beta) \} P_n'(\cos \theta) \quad (7b)$$

$$\sigma_{rr}^a = \frac{2\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \{ \psi_0 i^n (2n+1) E_{11}^{(1)}(\alpha) + A_n E_{11}^{(3)}(\alpha) + B_n E_{12}^{(3)}(\beta) \} P_n(\cos \theta) \quad (7c)$$

$$\sigma_{r\theta}^a = \frac{2\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \{ \psi_0 i^n (2n+1) E_{41}^{(1)}(\alpha) + A_n E_{42}^{(3)}(\alpha) + B_n E_{42}^{(3)}(\beta) \} P_n'(\cos \theta) \quad (7d)$$

$$u_r^b = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \{ C_n E_{71}^{(1)}(\bar{\alpha}) + D_n E_{72}^{(1)}(\bar{\beta}) \} P_n(\cos \theta) \quad (8a)$$

$$u_\theta^b = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \{ C_n E_{81}^{(1)}(\bar{\alpha}) + D_n E_{82}^{(1)}(\bar{\beta}) \} P_n'(\cos \theta) \quad (8b)$$

$$\sigma_{rr}^b = \frac{2\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \{ C_n E_{11}^{(1)}(\bar{\alpha}) + D_n E_{12}^{(1)}(\bar{\beta}) \} P_n(\cos \theta) \quad (8c)$$

$$\sigma_{r\theta}^b = \frac{2\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \{ C_n E_{41}^{(1)}(\bar{\alpha}) + D_n E_{42}^{(1)}(\bar{\beta}) \} P_n'(\cos \theta) \quad (8d)$$

ここに、 $E_{71}^{(1)}(\alpha)$ などは球ベッセル関数の関数であり、 $\alpha = k_L r$ 、 $\beta = k_T r$ である。 $P_n(\cos \theta)$ はルジャンドルの多項式であり、 $P_n' = \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta)$ である。また、 ψ_0 は入射波の振幅を表し、今の場合 $\psi_0 = 1$ である。 $E_{71}^{(1)}(\alpha)$ などの具体的な表現は省略する。

5. 後方散乱場

式(7)、式(8)における r を球の半径 d に等しく置いて式(6)に代入すると、係数 A_n, B_n, C_n, D_n に関する代数式を得る。これを解いて係数が決まれば、任意の (r, θ) に対する変位場が式(7)、(8)より求まる。

ここでは、Fig.1における負の x_3 軸に沿う後方

散乱場：

$$u^s = u - u^i$$

に着目した。また、インクルージョンの半径 d で無次元化した入射波の波数 k_L 、インクルージョンと母体の物性は次のように定めた。

$$d k_L = 1.3, \bar{E}/E = 1/4, \bar{\nu} = \nu = 1/4, \bar{\rho}/\rho = 1.2$$

Fig.3, 4, 5に、界面のスプリング定数 $S \equiv S_r = S_\theta = S_\phi$ を0.01, 1.0, 100と変化させた場合の、後方散乱場 u_3^s を示す。なお、この場合、 S は $S d/E$ 、 u_3^s は $u_3^s / |u^i|$ と無次元化されている。

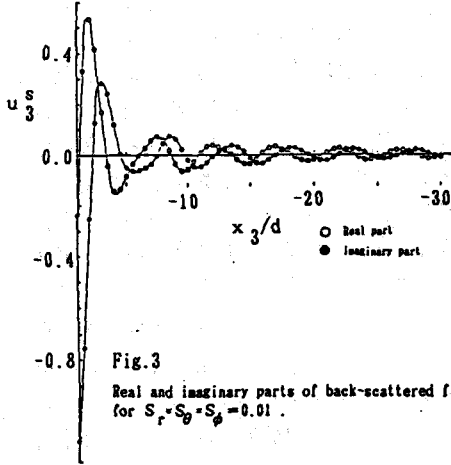


Fig.3

Real and imaginary parts of back-scattered fields for $S_r = S_\theta = S_\phi = 0.01$.

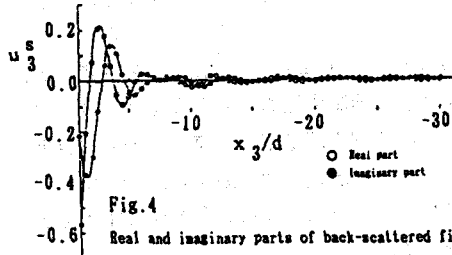


Fig.4

Real and imaginary parts of back-scattered fields for $S_r = S_\theta = S_\phi = 100$.

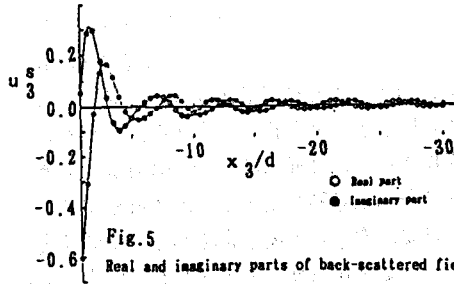


Fig.5

Real and imaginary parts of back-scattered fields for $S_r = S_\theta = S_\phi = 1.0$.