

推定母数の信頼性評価の諸特性

信州大学工学部 正会員 荒木正夫 信州大学工学部 正会員 寒川典昭
 信州大学大学院 学生員○草刈智一 信州大学工学部 田辺守英

1. はじめに

確率水文学の不確定さを支配する主要な原因の1つに、データの量的・質的不十分さのために母数推定に十分な情報が与えられないことが掲げられる。我々は、この問題をエントロピーの立場から論じてきた。例えば、文献 1), 2), 3), 4) は非正規母集団を対象としてこの問題について検討した最近の研究である。本稿では、これらの研究結果と実用的な指標とを結びつけるため、まず第一段階として、推定母数の事後確率分布のエントロピーと期待値、及び確率水文学の変動性との関係を調べる。ただし、ここでは確率分布としてガンベル分布を採用する。

2. 推定母数の信頼性

(1) 尺度母数 a を未知、位置母数 b を既知とした場合

a とは無関係に一定で既知の b をもって、 n 個の確率変数 $\tilde{x}(n)$ が互いに独立に (1) 式のガンベル分布に従うものとする。この時、確率変数 \tilde{a} の事前確率分布に (2) 式の一様分布を仮定すると、 $\tilde{x}(n) = x(n)$ が与えられての事後確率分布は (3) 式ようになる。従って、 \tilde{a} の事後確率分布のエントロピーは (4) 式で表わされる。

(2) a を既知、 b を未知とした場合

(1) と同様に、確率変数 \tilde{b} の事前確率分布に (5) 式の一様分布を仮定すると、 \tilde{b} の事後確率分布は (6) 式ようになる。従って、 \tilde{b} の事後確率分布のエントロピーは (7) 式で表わされる。

3. 期待値及び確率水文学

2.(1) 及び (2) のそれぞれ場合において、 \tilde{a} 及び \tilde{b} の事後確率分布の期待値はそれぞれ (8), (9) 式で表わされる。また、100年確率水文学量は (10) 式から計算される。

4. 実測資料の適用

実測資料として、松本の年最大日降水量を用いた。資料数は観測された年代の古い資料から順に $n=1, 2, \dots, N$ とした。

(1) a を未知、 b を既知とした場合

既知とした b は全資料を用いて積率法により求めた値を使用した。また、事前情報である a_1 及び a_2 は初期の状態での a の存在範囲を十分保証できる値として a_1 に 0.02、 a_2 に 0.15 を与えた。確率水文学の算定にあたっては、既知とした b と、資料数が増加するごとに積率法を用いて求めた a の値を使用した。図-1 に資料数増加による年最大日降水量、エントロピー及び a の期待値の変動を、また、図-2 にはエントロピーと 100年確率水文学量の変動を示している。これらの図より、資料数が30個程度を超え、エントロピーが安定した減少をするようになってからは、 a の期待値も安定した値を示すことがわかる。確率水文学量においても、ほぼ同様である。これより、 a の推定精度の向上は a の期待値や確率水文学量の安定性と密接に関連していると言える。

(2) a を既知、 b を未知とした場合

既知とした a 及び、事前情報である b_1, b_2 は上述と同じ方法で求め b_1 に 40.0、 b_2 に 80.0 を与えた。確率水文学の算定も、(1) の a と b の立場を変えて同様に求めた。図-3 に資料数増加による年最大日降水量、エントロピー及び b の期待値の変動を、また、図-4 にはエントロピーと 100年確率水文学量の変動を示している。ここでも30個程度までのエントロピーの減少量はそれ以後と比較して大きく、この点を境にして b の期待値の変動が小さくなり、100年確率水文学量にも安定性を増している。従って、 b の推定精度の向上

も b の期待値や確率水文学の安定性と密接に関連していると言える。また、図-1と図-3、図-2と図-4の挙動の相違は、確率分布へのパラメタの入りに起因しているものと思われる。

表-1. 数式の一覧

$f(x) = a \exp\{-a(x-b) - e^{-a(x-b)}\}$ (1)	$f(b x(n)) = \frac{1}{K_b} \exp\{aln - e^{ab} \sum_{i=1}^n p^{-ax_i}\}$ (6)
$f(a) = 1/(a_2 - a_1)$ (2)	ここで、 $K_b = \int_{b_1}^{b_2} \exp\{abn - e^{ab} \sum_{i=1}^n p^{-ax_i}\} db$
$f(a x(n)) = \frac{1}{K_a} \int_{a_1}^{a_2} \exp\{aA - e^{ab} \sum_{i=1}^n p^{-ax_i}\} da$ (3)	$H(b) = \ln K_b - \frac{n}{K_b} \int_{b_1}^{b_2} ab \exp\{abn - e^{ab} \sum_{i=1}^n p^{-ax_i}\} db$
ここで、 $K_a = \int_{a_1}^{a_2} a^n \exp\{aA - e^{ab} \sum_{i=1}^n p^{-ax_i}\} da$, $A = -n(\bar{x}-b)$	$\frac{\int_{b_1}^{b_2} p^{-ax_i}}{K_b} \int_{b_1}^{b_2} \exp\{ab(n+1) - e^{ab} \sum_{i=1}^n p^{-ax_i}\} db$ (7)
$H(a) = \ln K_a - \frac{n}{K_a} \int_{a_1}^{a_2} a^n \ln a \exp\{aA - e^{ab} \sum_{i=1}^n p^{-ax_i}\} da$	$E(a) = \frac{1}{K_a} \int_{a_1}^{a_2} a^{n+1} \exp\{aA - e^{ab} \sum_{i=1}^n p^{-ax_i}\} da$ (8)
$-\frac{A}{K_a} \int_{a_1}^{a_2} a^{n+1} \exp\{aA - e^{ab} \sum_{i=1}^n p^{-ax_i}\} da$	$E(b) = \frac{1}{K_b} \int_{b_1}^{b_2} b \exp\{abn - e^{ab} \sum_{i=1}^n p^{-ax_i}\} db$ (9)
$+\frac{1}{K_a} \int_{a_1}^{a_2} e^{ab} \sum_{i=1}^n p^{-ax_i} a^n \exp\{aA - e^{ab} \sum_{i=1}^n p^{-ax_i}\} da$ (4)	$x_{100} = b + 4.8/a$ (10)
$f(b) = 1/(b_2 - b_1)$ (5)	

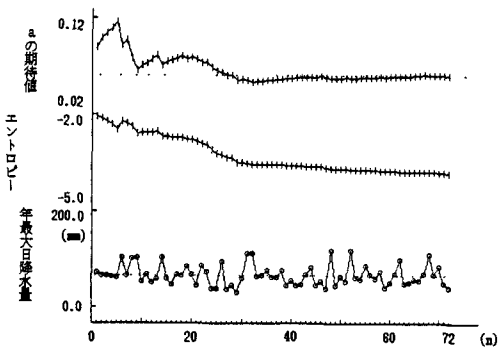


図-1 年最大日降水量，エントロピー， a の期待値の変動

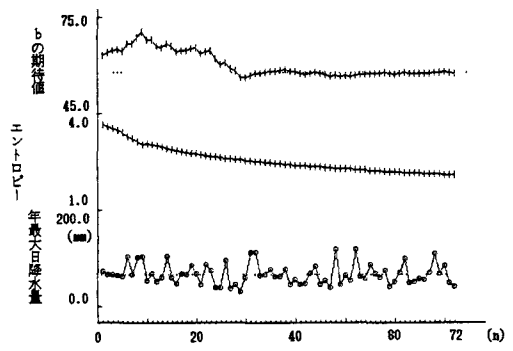


図-3 年最大日降水量，エントロピー， b の期待値の変動

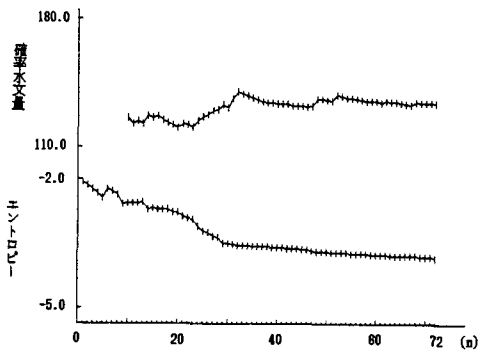


図-2 エントロピー，100年確率水文学の変動

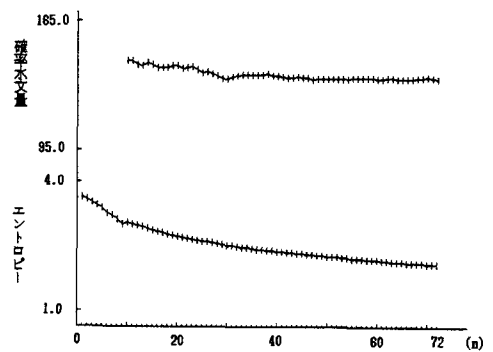


図-4 エントロピー，100年確率水文学の変動

5. おわりに

本稿では、資料数の増加による母数推定精度の向上とその期待値及び確率水文学の変動の安定性を見てきた。今後は、他の地点においても同様の検討を行うと共に、母数推定精度と確率水文学との関連を理論的に結びつけていきたい。

- 1) 荒木，寒川，上原：指数分布・対数正規分布の母数推定の信頼性，60年度中部支部講演集，1986年。
- 2) 上原，荒木，寒川：非正規母集団の推定母数の信頼性（その2），第41回土木学会年講，1986年。
- 3) 上原，荒木，寒川，草刈：非正規母集団の推定母数の信頼性（その3），61年度中部支部講演集，1987年。
- 4) 草刈，荒木，寒川，上原：ガンベル分布の推定母数の信頼性，第41回土木学会年講，1987年。