II—11

渇水時流況の表現のための離散化確率モデルの選定

名古屋工業大学　学生員　○鈴木　正人　　外山　康彦　　正員　長尾　正志

1．　研究の概要

われわれは貯水池による渇水時利水補給という観点から、統計的貯水池理論を用いて様々な解析を行なっているが、その中で、貯水池系列への入力としての渇水時流況をどの様に表現するかという基礎的課題がある。本研究は、自己相関性を持つ渇水時流況を表現するための適切な離散化確率モデルの選定を目標に、モデル分布に、正、負の二項分布を採用し、また母数推定手法には、積率法、最尤法の両手法を、数値実験的に比較、検討するとともに、実際のデータへの適用を行なった。

2．　モデル化対象の理論分布

渇水時流況を表現するために、相関を持つ標準離散分布である、正、負の二項分布を用いた。これら二つの分布が、貯水池問題に関する酔歩理論の適用に有用であることは、すでに報告している。[1)]

3．　母数推定の手法

これには、積率法、及び最尤法を用いた。まず、n個の流入量データ $\{x_1、x_2、\cdots\cdots、x_n\}$（平均$\bar{x}$，分散$\sigma^2$）が与えられたとして理論式を誘導する。

3．1　積率法

二項分布の場合、二次の積率までとって、

$$r\cdot a=\bar{x}\quad\cdots\cdots(1)\qquad\qquad r\cdot a(1-a)=\sigma^2\quad\cdots\cdots(2)$$

の二つの式を、rおよびaについて解くことになる。負の二項分布の場合も同様の手順による。しかし、ここで注意しなければならないのは、パラメータaが正という条件より、平均$\bar{x}$が分散σ^2 より大きければ、二項分布、小さければ負の二項分布というように、データの平均、分散の大小関係でモデル分布が決ってしまうということである。

3．2　最尤法

二項分布の場合、対数尤度lnLは、次式で表される。

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\ln\binom{r}{a}a^{xi}(1-a)^{r-xi}\quad\cdots\cdots(3)$$

最尤推定量r、aを求めるには、、(3) 式をrおよびaてそれぞれ偏微分して0と置いた次式を連立させて解く。したがって、

$$\frac{\partial\ln L}{\partial a}=\frac{1}{\hat{a}}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{1-\hat{a}}\left(r\cdot n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=0\quad\cdots\cdots(4)$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{xi}\frac{1}{\hat{r}+1-j}+n\cdot\ln(1-a)=0\quad\cdots\cdots(5)$$

を解くことになる。ここで、(4) 式より、$\hat{a}\cdot\hat{r}=\bar{x}$の関係が得られ、一次の積率に関して、最尤解と積率解は一致することがわかる。負の二項分布の場合も、同様の誘導が可能であり、やはり一次の積率に関して、最尤解と積率解は一致する。

最尤法に関しては、同時分布への適用も、表式化が可能であるが、計算そのものも煩雑であるとともに、紙数を要するので、ここでは記述を省略しておく。

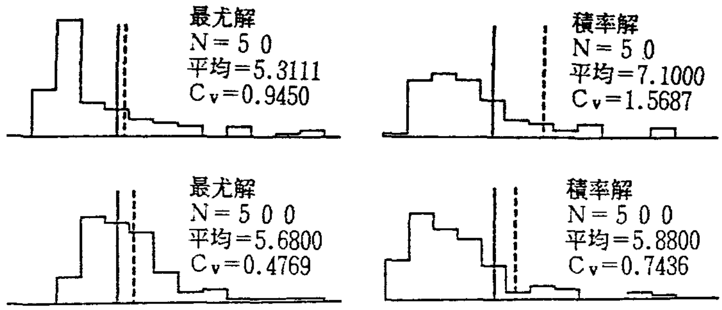
4．　数値実験による両手法の比較

渇水時流況のモデル化という観点から、相関を持つ乱数発生による数値実験という形で両手法の比較を行なった。具体的には、まず、母数の組（a、r、ρ）を仮定し、その同時分布に従うN個の乱数を１００組発生させ、各組に対して、最尤法、積率法により、母数を推定し、その結果を比較する。

r＝５、a＝０．２、ρ＝０．６で、N＝５０、５００個の場合の、両手法による母数rの推定結果を、

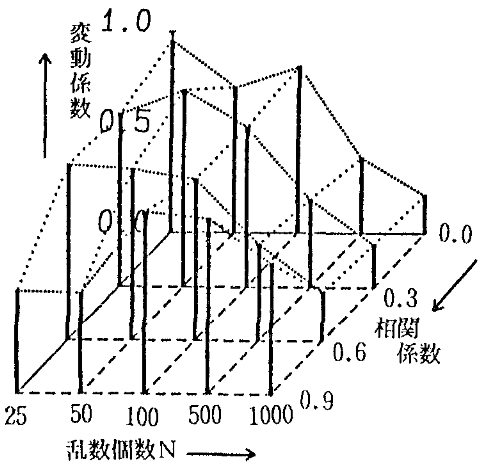
図－１に示す。図中の実線は、母数の真値、点線は、推定値の平均値を示す。

最尤解の方が、どの発生個数についても、積率解より変動が小さくなっており、不偏性において優れていることが分かる。積率解は、平均と分散だけから解を求めるため、二項分布の条件にあいにくい場合、つまり、平均が分散にかなり近い場合には、母数ｒを、とてつもなく大きく推定してしまうことになり、その結果、推定値の変動が大きくなってしまうのであろう。



図－１　数値実験による積率解，最尤解の比較

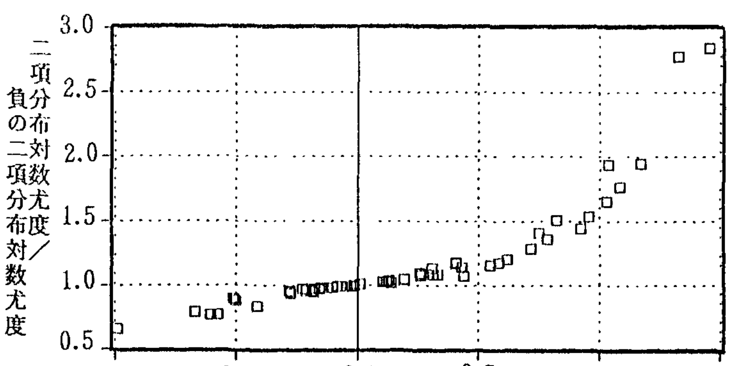
次に、最尤解について、真値ｒ＝５、ａ＝０．２で、相関係数ρおよび乱数個数Ｎを変化させた場合の推定値ｒの変動係数を、図－２に示す。全体的にみて、個数が多いほど変動係数が小さくなっている。また、個数が少ないときは、相関係数が大きくなるほど、変動係数が小さくなり、逆に個数が多いときは、相関係数が大きくなるほど変動係数も大きくなっている。これは、個数が少ないときは、相関係数の増大は、分布形の安定へつながり、個数が多いときは、逆に、両極端の状態を発生させ、分布形を不安定にするためだと思われる。



図－２　数値実験条件と変動係数

５．　実データへの適用計算

牧尾ダムの冬期渇水期のデータに対し、単位量を、３日×１，２，３ m^3/sec として離散化し、二項分布、負の二項分布を、最尤法でモデル化し、縦軸に、両分布に対する、最大対数尤度の比を、横軸に分散を平均で除した値の対数値のプロットが図－３である。縦軸で、値が１より大きい場合は、負の二項分布が、二項分布より、モデルとして適していることを意味し、横軸で、値が０より大きい場合は、分散が平均より大きいことを意味している。この図から、二項分布系においては、最尤法においても、積率法と同様に、一次と二次の積率の大小関係によって、モデル分布の選別が行われることが示唆される。



図－３　平均分散の大小関係と対数尤度

参考文献　1)長尾正志：貯水池による水量制御の信頼性評価，水理委員会水工学シリーズ，1984