斜面上のクノイド波の解析的表示

岐阜大学 正会員 安田孝志
岐阜大学 学生員○鵜飼亮行

1.緒 言 斜面上の孤立波に関しては，近似解の誘導が比較的容易ということもあって，その変形特性はかなり明らかにされているが，クノイド波の場合の解明は余り進んでおらず，孤立波に見られるshelf の生成の有無さえ明らかではない．本研究では，Yajimaの手法[1]を角谷の式に適用して斜面上のクノイド波の近似解を導き，浅水化に伴うクノイド波の変形特性を明らかにしたい．

2.斜面上のクノイド波の近似解 斜面上のK-dV方程式である角谷の式は次式で与えられる．

$$\eta_x + \frac{3}{2C_0^3}\eta\eta_\xi + \frac{C_0}{6}\eta_{\xi\xi\xi} - \frac{B_{\tau}^*}{4C_0^2}\eta = 0 \tag{1}$$

ここに，

$$\xi = \varepsilon^{1/2}\left\{\int_0^{x^*} dx/C_0 - t^*\right\},\ X = \varepsilon^{3/2}x^*,\ C_0 = \sqrt{h^*},\ h^* = 1 - B^*,$$
$$x^* = x/h_1,\ h^* = h/h_1,\ B^* = B/h_1,\ t^* = t\sqrt{g/h},\ \varepsilon = (h_1/L_1)^2, \tag{2}$$
$$\eta_1 = z'/\varepsilon h_1$$

であり，z' は平均水面周りの水面変動，x は水平座標，t は時間，h は水深，h_1 は原点での水深，B はx軸から水底までの高さ（$B=h_1-h$），およびL_1は原点でのクノイド波の波長である． ここで，次式の変換

$$\eta = (2/3)C_0^4 u,\ s = (1/6)\int_0^x C_0 dx,\ \nu = 9B_s^*/4C_0^2,$$
$$u = 2\partial_\xi^2 \log F \tag{3}$$

を式(1) に適用すれば，式(1) は次式の双1 次形式に書き換えられる．

$$\left[D_s D_\xi + D_\xi^4 + \lambda(s)\right]FF = \nu\,\partial_\xi(FF) \tag{4}$$

ここに，D は次式で定義されるD-演算子である．

$$D_\xi^n FF = \left[(\partial_\xi - \partial_{\xi'})^n F(\xi)F(\xi')\right]_{\xi=\xi'} \tag{5}$$

式(4) において$\nu=0$とすれば，その特解は第 3種 theta関数ϑ_3 によって次式のように表される．

$$F = \vartheta_3(\varphi_0|T_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp(2\pi i m\varphi_0 + \pi i m^2 T_0) \tag{6}$$

ここに，$\varphi_0 = q_0(\xi - V_0 s)$，$T_0 = iK_0'/K_0$，$V_0 = (4q_0K_0)^2(2 - k_0^2 - 3E_0/K_0)$

であり，k は楕円積分の母数，K およびEは第 1種および第 2種完全楕円積分，K'は補母数$k'\ (=\sqrt{1-k^2})$に対する第 1種完全楕円積分，および添字の $_0$ は$\nu=0$となる一様水深の場合の解であることを示す．式(6) を基にして式(4) を満足するせつ動解を次式のように仮定する．

$$F = \vartheta_3(\varphi|T)(1+G)$$
$$\varphi = q(s)\left[\xi - \int V(s)ds\right] + \psi(\xi, s) \tag{7}$$
$$G = G(\xi, s),\quad T = iK'(s)/K(s)$$

ここで，G, ψ, dq/ds, dV/ds および dT/ds はνと同程度の微小量としてせつ動近似によって式(4) を解くと，次式が得られる．

$$u = 2q^2\left\{(1+2\psi_\varphi)(2kK)^2\left[cn^2(2K\varphi - K) - J\right]\right.$$
$$\left. + Z(2K\varphi - K) + 2H(\varphi, s) - 4\int_0^s \frac{\lambda d}{q}ds\right\} \tag{8}$$

ここに， $J=(1/k^2)(E/K+k^2-1)$ ， $\psi=-\alpha\varphi^2/2$

$$\alpha=-(3/4)h_s^*/g\nabla h^*,\quad \nabla=16g^2K^2[2-k^2-3(E/K)],\tag{9}$$

$$\lambda=32g^4K^4[2-k^2-k^4-8(E/K)+4k^2(E/K)+6(E/K)^2]$$ であり，

cn はJacobiのcn関数，Z はJacobiのZeta関数，および $H(\varphi,s)$ は次式を満足する 1種のAiry波を表す．

$$H_s-g\nabla H_\varphi+g^3\{H_{\varphi\varphi\varphi}+12[G\partial_\varphi^2\log\vartheta]_\varphi\}=(\alpha_s/2)[\varphi^2(\log\vartheta)_\varphi]_{\varphi\varphi}\tag{10}$$

式(10)の右辺第 1項は浅水効果を受けたクノイド波，第 2項は斜面上の孤立波の場合に生じるplateau に相当した成分，第 3項は同じくtailに相当した成分，および第 4項はset-downを表すものと考えられる． これから，孤立波の場合に生じたplateau およびtailがクノイド波の場合にも同様に生じ，加えてset-downも発生することが明らかになっている．

3.斜面上におけるクノイド波の変形 ここでは，式(10)に示した第1 および第2 項に着目して波形変化について検討する．式(10)を基に原点での水深で無次元化した波形 z'/h_1 の表示を導けば，次式のようになる．

$$z'/h_1=(A/A_1)\{(cn^2\theta-J)-[\beta/(2kK)^2]Z(\theta)\}\tag{11}$$

ここに，

$$\beta=9T_0^{*3}\tan\theta/32h^{*3/2}K^2(2-k^2-3E/K),\quad \theta=[\sqrt{3A}/2h^*k]t^*\tag{12}$$

$$A/A_1=h^{*-1/4}(k/k_0)^2\{[-e_0(3e_0+2k_0^2-4)+k_0^2-1]/[-e(3e+2k^2-4)+k^2-1]\}^{1/2},\quad e=E/K\tag{13}$$

であり，母数 k は次式より h^* の変化に応じて定まることになる．

$$1=h^{*9/4}(K_0/K)^2\{[-e_0(3e_0+2k_0^2-4)+k_0^2-1]/[-e(3e+2k^2-4)+k^2-1]\}^{1/2}\tag{14}$$

図-1は，式(13)における振幅の浅水変化を h^{-1} および $h^{-1/4}$ 則と比較したものであり，両者の中間的性格を持つことがわかる．また，図-2は，浅水化の過程における波形変化を式(11)によって示したものである．

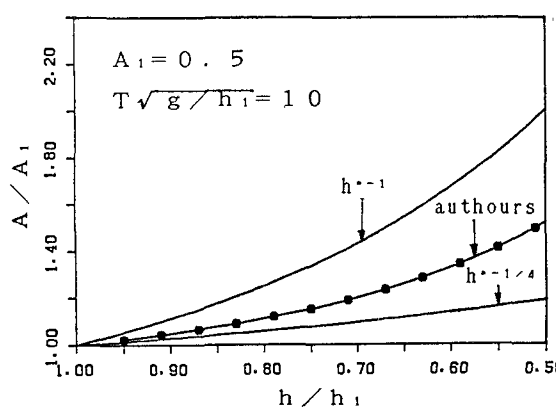

図-1 クノイド波の振幅の浅水変化

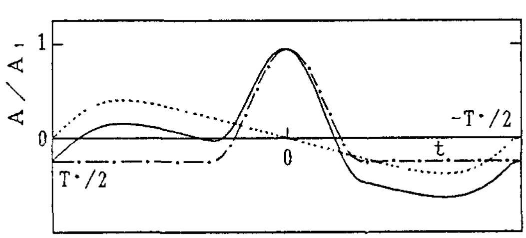

図-2 斜面上のクノイド波の波形

$A_1=0.5$, $T\sqrt{g/h_1}$, slope=1/100, $h^*=0.6$

――合成波形

―・―式(11)の第1項による波形

------式(11)の第2項による波形

4.結　語 斜面上のK-dV方程式の解析的近似解を示し，孤立波と同様，クノイド波も斜面上でplateau およびtailを励起することを明らかにすると同時に，その変化特性の一端を理論的に解明した．

5.参考文献

1) Yajima,N. : Application of Hirota's method to a perturbed system, Jour.Phys.Soc.Japan, Vol.51, No.4, pp.1298-1302, 1982.