

任意断面地形上の浅海波の表示方法について

名古屋工業大学 ○学生員 佐藤 宏志  
 名古屋工業大学 正員 喜岡 渉

1. はじめに

浅海域に設置される構造物の外力評価にあたっては、通常流れ関数法が用いられている。ただし、この方法によると、波形を前もって与えない限り海底地形の影響を流速計算に取り込むことはできないし、斜面上の碎波のように保存波の理論上の適用領域からはずれる場合には収束解を得ることができないことがある。一方、Mei & Méhauté<sup>(1)</sup> は任意地形底面上の非線形長波の方程式を誘導しており、その数値解は特性曲線法により二、三求められているが、初期値問題として取り扱うために任意地点での流速、波形などを得るのは容易ではない。また、WKB法に基づく一連の解析結果は、現在のところ底面地形の影響が重要になると考えられる浅海域では収束解が得られていない。本研究はMei & Méhautéと同様な方法で任意地形底面上の非線形長波の方程式を誘導するとともに、その近似解を流れ関数法と同様に最小二乗法により求めようとするもので、得られた解析解の有用性について若干の検討を加えるものである。

2. 解析方法

座標系は図-1に示すように、 $\bar{z}$ 軸を鉛直上向きに正にとり、 $\bar{x}$ 軸は波の進行方向に負になるように定義した。なお、 $\bar{\eta}$ は静水面からの水面変動量を表し、水深 $\bar{h}$ は $\bar{x}$ の関数で表される。また、用いる全ての諸量は、計算点における水深 $\bar{h}$ で次のように無次元化したものである。

$$z = \bar{z} / \bar{h}, \quad x = \bar{x} / \bar{h}, \quad t = \bar{t} (g / \bar{h})^{1/2},$$

$$H = \bar{H} / \bar{h}, \quad \eta = \bar{\eta} / \bar{h}, \quad \Phi = \bar{\Phi} / \bar{h} (g \bar{h})^{1/2}$$

無次元化した速度ポテンシャル $\Phi$ を $(z + h)$ のべき級数である(1)式のように表す。

$$\Phi(x, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} (z + h)^m \cdot \Phi^{(m)}(x, t) \quad (1)$$

この時、無次元化した水平方向および鉛直方向の水粒子速度 $u, w$ は(2)式、(3)式で表される。

$$u = \Phi_x = \sum_{m=0}^{\infty} (z + h)^m \cdot \{ \Phi_x^{(m)} + (m + 1) h' \cdot \Phi^{(m+1)} \} \quad (2)$$

$$w = \Phi_z = \sum_{m=0}^{\infty} (z + h)^m \cdot (m + 1) \cdot \Phi^{(m+1)} \quad (3)$$

求める $\Phi$ はLaplaceの方程式、水底における境界条件そして水面における運動学的境界条件および力学的境界条件を満足すべき関数である。(1)式で示した速度ポテンシャル $\Phi$ をLaplaceの方程式および水底における境界条件式に代入すると、(4)式、(5)式の関係式が得られ、この関係式より $\Phi^{(m)}$ は全て $\Phi^{(0)}$ で表される。

$$\Phi^{(m+2)} = - \{ \Phi_{xx}^{(m)} + 2(m+1)h' \cdot \Phi_x^{(m+1)} + (m+1)h'' \cdot \Phi^{(m+1)} \} / (m+1)(m+2) [1 + (h')^2] \quad (4)$$

$$\Phi^{(1)} = -h' \cdot \Phi_x^{(0)} / [1 + (h')^2] \quad (5)$$

$\Phi^{(4)}$ まではMei & Méhautéにより与えられているので、 $m = 8$ までについて求めると次式を得る。

$$\Phi^{(5)} = - (h^{(5)} \cdot \Phi_x^{(4)} + 5h^{(4)} \cdot \Phi_{xx}^{(4)} + 10h^{(3)} \cdot \Phi_{xxx}^{(4)} + 10h'' \cdot \Phi_{xxxx}^{(4)} + 5h' \cdot \Phi_{xxxxx}^{(4)}) / 120 + O(\epsilon^4)$$

$$\Phi^{(6)} = - \Phi_{xxxxxx}^{(0)} / 720 + O(\epsilon^4)$$

$$\Phi^{(7)} = \{ -h^{(7)} \cdot \Phi_x^{(6)} - 7h^{(6)} \cdot \Phi_{xx}^{(6)} + (15h^{(5)} - 21h^{(4)}) \cdot \Phi_{xxx}^{(6)} + (60h^{(4)} - 32h^{(3)} - 3h^{(2)}) \cdot \Phi_{xxxx}^{(6)} + (60h^{(3)} - 26h^{(2)} - 9h^{(1)}) \cdot \Phi_{xxxxx}^{(6)} - (10h^{(2)} + 9h^{(1)}) \cdot \Phi_{xxxxxx}^{(6)} - 3h'' \cdot \Phi_{xxxxxxx}^{(6)} \} / 5040 + O(\epsilon^4)$$

$$\Phi^{(8)} = (30h^{(8)} \cdot \Phi_x^{(8)} + 60h^{(7)} \cdot \Phi_{xx}^{(8)} + 30h^{(6)} \cdot \Phi_{xxx}^{(8)} - 15 \cdot \Phi_{xxxx}^{(8)} + \Phi_{xxxxxxx}^{(8)}) / 40320 + O(\epsilon^4) \quad (6)$$

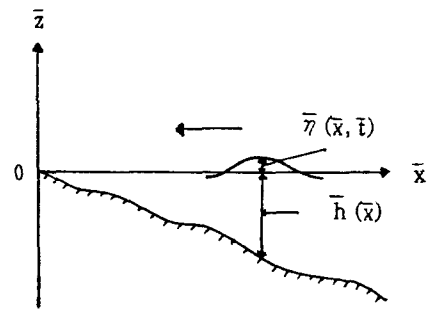


図-1 座標系

ここで、速度ポテンシャル $\Phi^{(0)}$  および静水面からの水面変動量 $\eta$ はそれぞれ(7)式、(8)式のように表すことができるものとする。

$$\Phi^{(0)} = \sum_{n=1}^N [ A_{2n-1} \cdot \cos n(\int k dx + \sigma t) + A_{2n} \cdot \sin n(\int k dx + \sigma t) + \bar{A}_{2n-1} \cdot \cos n(\int k dx - \sigma t + \epsilon) + \bar{A}_{2n} \cdot \sin n(\int k dx - \sigma t + \epsilon) ] \quad (7)$$

$$\eta = \sum_{n=1}^N [ B_{2n-1} \cdot \cos n(\int k dx + \sigma t) + B_{2n} \cdot \sin n(\int k dx + \sigma t) + \bar{B}_{2n-1} \cdot \cos n(\int k dx - \sigma t + \epsilon) + \bar{B}_{2n} \cdot \sin n(\int k dx - \sigma t + \epsilon) ] \quad (8)$$

式中の未知定数などは、1周期 $T$ の波を $M$ 個に分割し、分割点 $t_i$  ( $i = 0 \sim M$ ) に対する $\Phi^{(0)}$  および $\eta$ が水面における運動学的境界条件および力学的境界条件を満足するように決定する。すなわち、未知量 $A_j$ 、 $B_j$ 、 $\bar{A}_j$ 、 $\bar{B}_j$  ( $j = 1 \sim 2N$ )、 $\epsilon$ 、 $\int k dx$ 、 $k$ 、 $k$ の $x$ による微分値( $k'$ 、 $k''$ 、 $k''' \dots$ ) に対して、分割点 $t_i$ で水面における運動学的境界条件式および力学的境界条件式そして(9)式の波高 $H$ についての拘束条件式から与えられる $2M + 3$ 個の非線形方程式を最小二乗法を用いて解析する。

$$\eta_{\max} - \eta_{\min} - H = 0 \quad (9)$$

### 3. 解析結果と考察

今回の計算においては(1)式の数値ポテンシャル中の項は $m = 5$ まで取り、反射成分は全て0とした。1周期の分割数は $M = 20$ とし、(7)式、(8)式の $\Phi^{(0)}$ 、 $\eta$ に対するオーダーは $N = 8$ とした。また方程式の残差を最小にする繰返し計算は10回とし、各未知量に対する初期値は微小振幅波理論より与えた。図-2はこうして計算した時間波形を岩垣、酒井<sup>2)</sup>らの実験波形(図中点線で示した)と比較したものである。図-3は波の峰の位相での無次元水平水粒子速度 $u$ の鉛直分布であり、そして図中には実験波形を入力することによって計算したDeanの流れ関数理論による波の峰の位相での $u$ の鉛直分布を点線で示した。計算波形は実験波形と比較すると前傾度が小さいが、波の峰の位相での $u$ の鉛直分布についてはケース(c)を除いて良く一致している。

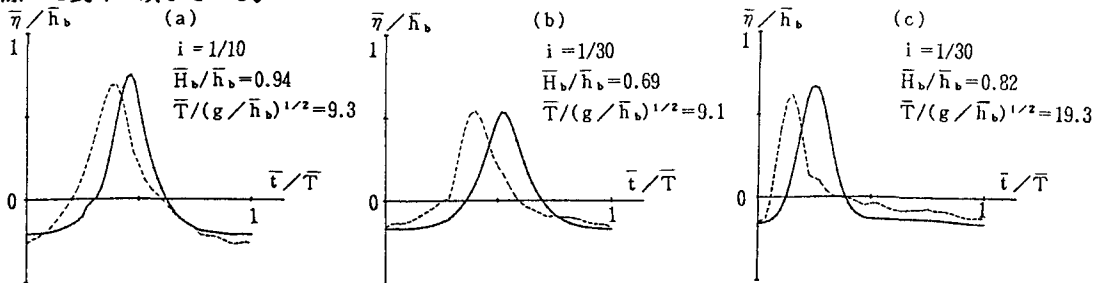


図-2 波の波形に関する計算値と実験値との比較

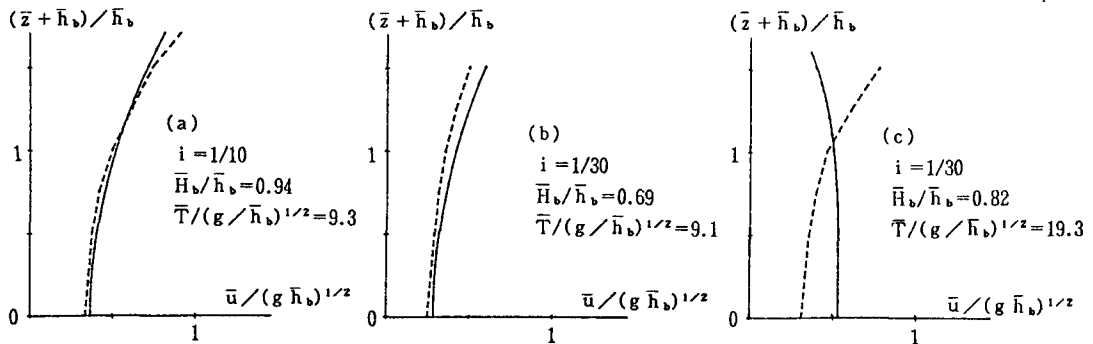


図-3 水平水粒子速度の鉛直分布に関する計算値とDeanの理論値との比較

### 参考文献

- 1) C. C. Mei & Méhauté; J. G. R., Vol 71, PP393 ~400, 1966.
- 2) 岩垣・酒井; 第21回海講, PP27~32, 1974.