

積分方程式法によるクラックの動的面外開口変位の解析

東海大学海洋学部 学生員 ○寺田 完次
東海大学海洋学部 正員 北原 道弘

1. はじめに

昨年の本支部研究発表会 [1] において、著者は単一の直線クラックによる面外散乱問題を積分方程式により定式化し、クラックの開口変位をチェビシェフ多項式で展開することにより、クラック面上の積分を“解析的”に評価し、開口変位、応力拡大係数、放射形式に関するいくつかの解析的結果を示した。本報告では、クラックの形状がより複雑となった場合、また、いくつかのクラックが点在する場合などを想定し、昨年と同様に積分方程式により同一の散乱問題を定式化するが、“数値解析的”に積分方程式を解いた場合の数値結果について報告する。

2. クラックによる面外散乱問題

図1に示すように、無限体中に長さ $2a$ のクラックを考える。面外散乱問題に対する基礎式及び応力の表現式は次のようである。

$$\mu(\Delta + k_T^2) u_3(x, \omega) = 0 \quad (1)$$

$$\sigma_{3j}(x, \omega) = \mu u_{3,j}(x, \omega), j (j=1, 2) \quad (2)$$

ここに、 u_3 が面外変位であり、 $k_T = \omega/C_T$ ($C_T = \sqrt{\mu/\rho}$) である。クラック表面上の境界条件は、次のようである。

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x_2 \downarrow 0} \sigma_{32}(x, \omega) = 0 \\ \lim_{x_2 \uparrow 0} \sigma_{32}(x, \omega) = 0 \end{array} \right\} -a \leq x_1 \leq a \quad (3)$$

いま、散乱波に対する変位と応力場を次のように定義する。

$$\{u_3^S, \sigma_{3j}^S\} = \{u_3, \sigma_{3j}\} - \{u_3^I, \sigma_{3j}^I\} \quad (4)$$

ここに、 u_3 は全変位場、 u_3^I は入射波の変位場である。このとき、入射変位場はクラック面上で連続であるから、クラックの開口変位は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \Delta u_3(x_1, \omega) &= \lim_{x_2 \downarrow 0} u_3(x, \omega) - \lim_{x_2 \uparrow 0} u_3(x, \omega) \\ &= \Delta u_3^S(x_1, \omega) \end{aligned} \quad (5)$$

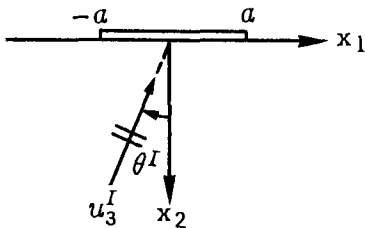


図1 長さ $2a$ のクラックと入射波 u_3^I

3. 積分方程式

まず、式 (1) に対応して、基本解 (無限体中のグリーン関数) を次のように定義する。

$$\mu(\Delta + k_T^2) u_3^G(x; y) = -\delta(x; y) \quad (6)$$

上式の解は次のようである。

$$u_3^G(x; y) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_T r), r = |x - y| \quad (7)$$

これより、応力に関する基本解が次のように得られる。

$$\sigma_{32}^G(x; y_1, 0) = \left[\mu \frac{\partial}{\partial y_2} u_3^G(x; y) \right]_{y_2=0} \quad (8)$$

この応力に関する基本解を用いて、散乱波 u_3^S に対する積分表現は次のようになる。

$$u_3^S(x) = \int_{-a}^a \sigma_{32}^G(x; y_1, 0) \Delta u_3(y_1) dy_1 \quad (9)$$

上式を微分して応力表現を作り、式 (3) に示した境界条件を用いると、次のようなクラック面上の積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} -\sigma_{32}^I(x_1, 0) &= \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-a}^a \sigma_{32}^G(x; y_1, 0) \Delta u_3(y_1) dy_1 \right\}_{x_2 \downarrow 0} \\ &= p.f. \int_{-a}^a \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{32}^G(x; y_1, 0) \right\}_{x_2 \downarrow 0} \Delta u_3(y_1) dy_1 \\ &\quad (-a < x_1 < a) \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、p.f. は発散積分の有限部分を表し、 σ_{32}^I は次のような入射波による応力成分である。

$$\sigma_{32}^I(x) = \mu \frac{\partial}{\partial x_2} u_3^I(x) \quad (11)$$

4. 数値解析例

積分方程式(10)は、入射波を与えて σ_{32}^I を評価し、クラック面上で積分を数值的に実行すれば、未知の開口変位 Δu_3 について“数值的”に解くことができる。以下、この意味における数値解析結果を前年報告したチェビシェフ多項式による解析解と比較してみた結果を示す。図2が鉛直入射 ($\theta^I = 0^\circ$) に対する開口変位 $|\Delta u_3|$ であり、図3が斜め入射 ($\theta^I = 30^\circ$) に対する開口変位である。なお、図中の○印が本報告における数値解、□がチェビシェフ多項式による解析解である。

に対する開口変位である。なお、図中の○印が本報告における数値解、□がチェビシェフ多項式による解析解である。

参考文献

[1] 寺田, 北原; クラックによるSH波の散乱問題の解析, 土木学会中部支部研究発表講演集, PP.60 - 61. 1987.

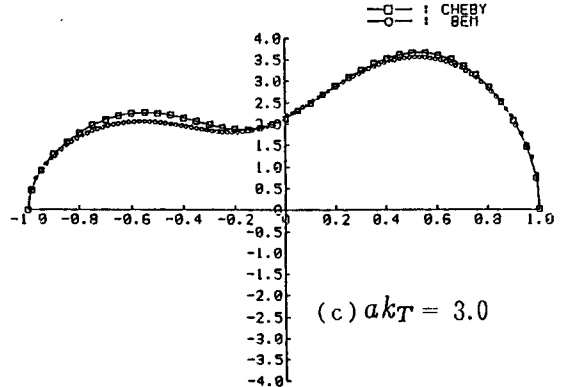
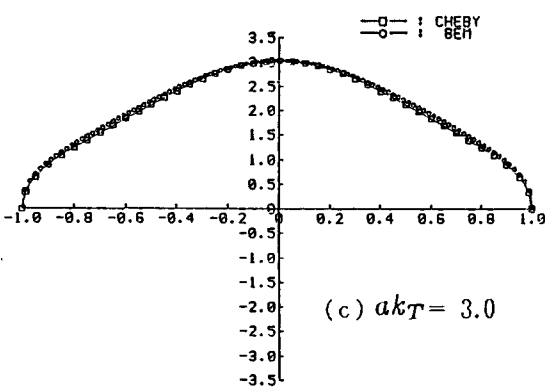
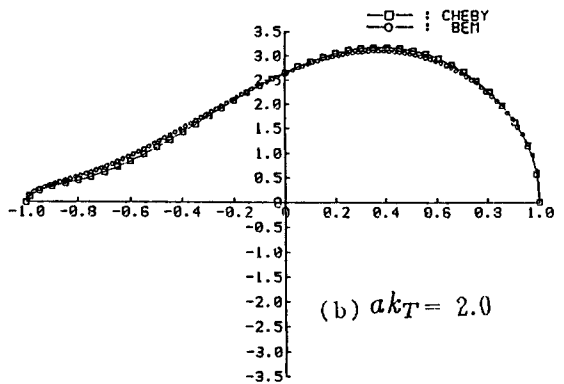
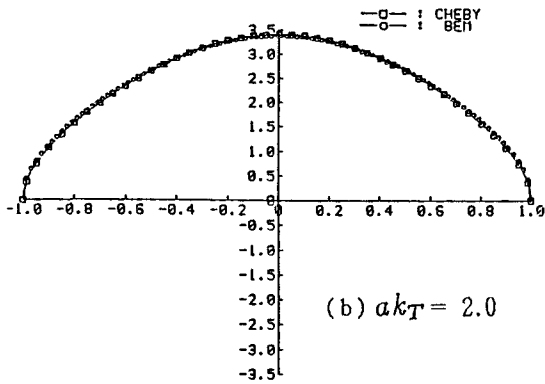
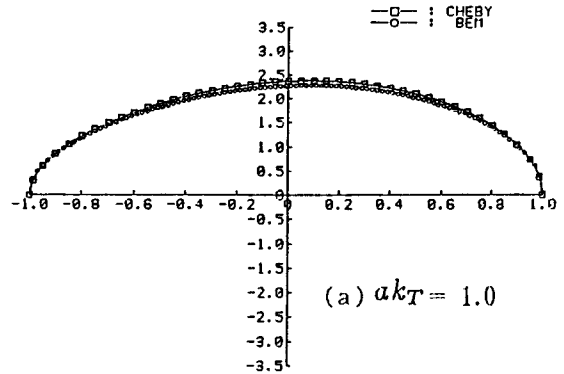
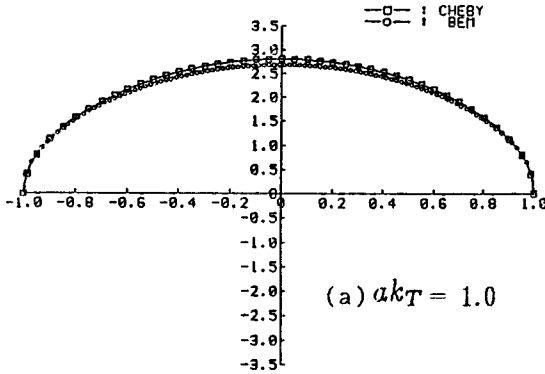


図2 開口変位 $|\Delta u_3|$, $\theta^I = 0^\circ$

図3 開口変位 $|\Delta u_3|$, $\theta^I = 30^\circ$