I —58

ボーン級数による面外多重散乱問題の解析

東海大学海洋学部　学生員　○樋江井　夕紀夫
東海大学海洋学部　正　員　北　原　道　弘

1．はじめに

2次元無限弾性体中に複数個の空洞が存在する場合を考える。本研究では、入射波を平面波と仮定したときの面外多重散乱問題の解析を行う。解析には境界積分方程式法を用いるが、その解法として、ボーン級数による解法を提案する。簡単のため、ここでは2個の空洞問題を設定するが、空洞の数が増加しても解法の要点は同じである。

2．多重散乱問題の定式化

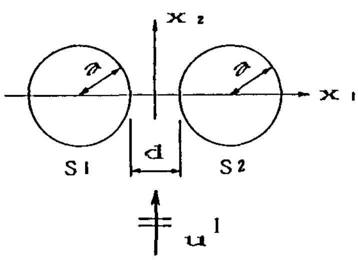

Fig.1 Scattering problem

いま、Fig. 1に示すようなモデルを考える。各空洞の表面S1, S2 上の境界条件は $\partial u/\partial n = 0$ である。このとき、離散化した後の境界積分方程式は次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^I \\ \mathbf{u}_2^I \end{Bmatrix} \tag{1}$$

ここで、u_i^I は入射波であり、u_i は各表面上の面外変位である。また、行列 $H_{i,j}$ の下添字は j 番目の空洞表面から i 番目の空洞表面への影響を意味する。

3．ボーン級数による解法

式(1) を次のように変形する。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^I \\ \mathbf{u}_2^I \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{H}_{12} \\ -\mathbf{H}_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

いま、次のように置く。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{H}_{12} \\ -\mathbf{H}_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \ \mathbf{u}_2\}^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{u}^I = \{\mathbf{u}_1^I, \ \mathbf{u}_2^I\}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

このとき、式(2) は次のように書ける。

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{u}^I + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{4}$$

ここで、式(4) に $\mathbf{A}$ の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$を左から作用させて次式を得る。

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}^I + \mathbf{C}\mathbf{u} \tag{5}$$

ここに、$\mathbf{A}^{-1}$ と $\mathbf{C}$ は次のようである。

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{H}_{12} \\ -\mathbf{H}_{21} & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

式(5) における右辺第1項は既知であるので、これを $\mathbf{u}$ の第0次近似とする。このとき、式(6) よりわかるように、第0次近似は入射波だけによる空洞の自己応答を表す。以下、第1，第2，第3次近似は次のように空洞間の相互応答（式(5)，(7) 参照）を順次表す表現となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}^I \\ \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{C}\mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{C}\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + \mathbf{C}\mathbf{u}_0 + \mathbf{C}^2\mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{C}\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_0 + \mathbf{C}\mathbf{u}_0 + \mathbf{C}^2\mathbf{u}_0 + \mathbf{C}^3\mathbf{u}_0 \\ &\bullet \\ &\bullet \\ &\bullet \end{aligned} \tag{8}$$

これより、第n次近似は次式のように書ける。

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_0 + \mathbf{C}\mathbf{u}_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{C}^k\mathbf{u}_0 \tag{9}$$

これが解 u のボーン級数的表現である。

4. 解析モデル

実際の数値解析では、Fig. 1に示したモデルにおいて、d = a、とおいた。すなわち、2つの空洞を半径の等しい円形とし、空洞間の距離を空洞の半径に等しくしたものである。なお、入射波は次式で示される単位振幅の平面波である。

$$u^I = e^{ikx_2} \tag{10}$$

また、解析に用いた要素数は1つの円につき36要素であり、一定要素を用いた。

5. 数値計算例

Fig. 2およびFig. 3は、1つの空洞の場合について、積分方程式法の結果をMorse の結果〔1〕によって検証したものである。Fig. 4およびFig. 5は、2つの空洞による多重散乱問題を、式(9) に示したボーン級数による解法により解析した結果である。図の実線は、式(1) に示した積分方程式系を解いた結果であり、○, △, □がボーン級数による結果である。図には第2次近似までを示したが、第3次近似は、ほぼ完全に実線と一致する。 より詳しい収束性の検討など、詳細は当日報告する。

参考文献 〔1〕Morse, P.M., Vibration and Sound, McGraw-Hill, 1948.

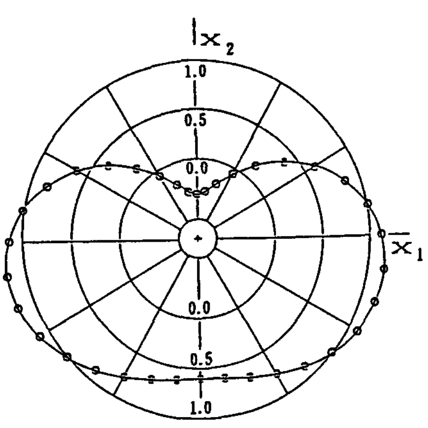

Fig.2 Real part of u for single cavity
(○: BEM, 実線 : Morse, ak_T =1.0)

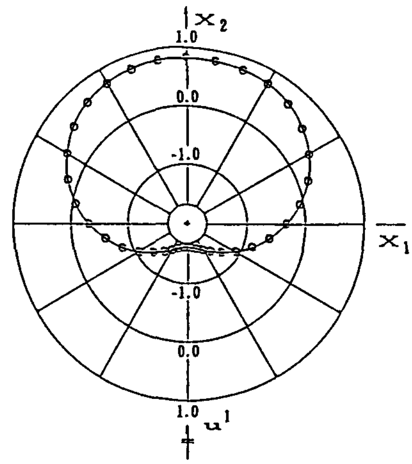

Fig.3 Imaginary part of u for single cavity
(○ : BEM, 実線 : Morse, ak_T =1.0)

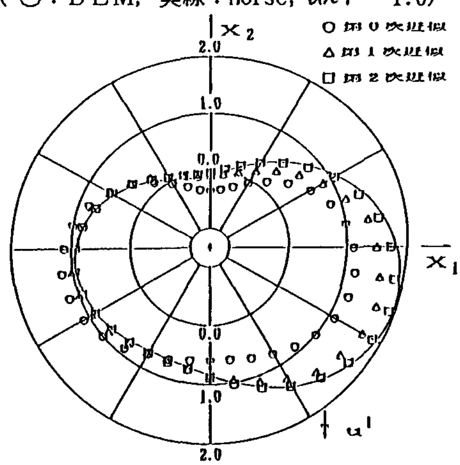

Fig.4 Real part of u for double cavities
(ak_T =1.0)

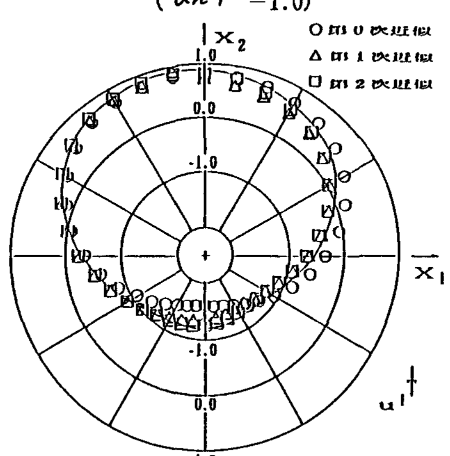

Fig.5 Imaginary part of u for double cavities
(ak_T =1.0)