I —29

離散化近似法による構造物の信頼性解析について

金沢大学大学院　学生員○中井良彰
金沢大学工学部　正会員　近田康夫
金沢大学工学部　正会員　小堀為雄

1　はじめに

構造物の応答解析においては，その汎用性から有限要素法が広く用いられており，また信頼性解析においては，これに線形一次近似理論等を適用した確率有限要素法と呼ばれる手法が応用されつつある。しかし，確率有限要素法は，現在のところ線型問題にしか適用できず，信頼性解析の汎用的手法としてはモンテカルロ法が採用されている。

本研究では，構造物の静的な解析でかつ結果が試行の順序に依存しない場合に対しては，モンテカルロ法のように乱数を用いることなく，より計算の効率化を図るための一手法である離散化近似法を採用し，非線形応答までも含めた範囲での解析例によりその有用性を検証するものである。

2　離散化近似法

まず，図1のような2つの入力確率変数X，Yと，確定的に与えられた関数$G(X,Y)$そして応答$Z=G(X,Y)$よりなる系を考える。いま，入力X，Yがそれぞれ3つの値よりなる離散型の確率変数であるとすると，応答Z は$X_i,Y_j\,(i,j=1,2,3)$の組み合わせにより9つの実現値よりなる確率変数となる。X，Yが互いに独立であるとすると，応答Z の期待値$E(Z)$，および分散$VAR(Z)$はそれぞれ，

$$E(Z)=\sum_i\sum_j G(X_i,Y_j)PX_i\cdot PY_j \tag{1}$$

$$VAR(Z)=\sum_i\sum_j G(X_i,Y_j)^2\,PX_i\cdot PY_j-(E(Z))^2 \qquad (i,j=1,2,3) \tag{2}$$

となる。ただし，PX_i,PY_j はそれぞれ X_i,Y_jの生起確率である。

すなわち，入力変数の実現値の組み合わせに対応した応答値を一度計算すればよいことになる。

また，Z の，ある値ZFに対する超過確率も，次式により計算される。

$$\mathrm{Prob}(Z\geq ZF)=\sum_{Z>ZF}\sum PX_i\cdot PY_j \tag{3}$$

この問題をモンテカルロ法を用いて解く場合には，応答の9つの実現値を入力変数の生起確率に比例して何回も同一の計算を行うことになり，極めて不経済なものとなる。

入力変数が連続型の確率変数の場合にも，上述した離散型確率変数の取扱の簡便さを取り入れようとするのが以下に示す離散化近似法である。

入力変数X，Yが確率密度関数$fx(x)$，$fy(y)$を有する互いに独立な連続型確率変数であるとき，これを，次式に示すように N個の点で離散化近似する。

$$\left.\begin{aligned} X:fx(x) &\longrightarrow X^*:PX_i=fx(x_i)/\sum_k fx(x_k) \\ Y:fy(y) &\longrightarrow Y^*:PY_j=fy(y_j)/\sum_k fy(y_k) \quad ,k=1,\cdots,N \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ただし，＊は離散化された変数を表している。このとき，PX_i，$i=1\sim N$ は X^* の確率質量関数となっており，$fx(x)$ とは次元が異なることに注意する必要がある。また，当然ながら，$\sum PX_i=1$，$\sum PY_j=1$が満足されている。応答 Zの確率密度関数もまた離散化され，次式の確率質量関数となる。

$$Z^*:PZ_{ij}=PX_i\cdot PY_j\ ,\ \sum\sum PZ_{ij}=1 \tag{5}$$

これ以降は，式(1)〜(3)を用いればよい。

このようにして，Z の期待値や分散も，Z^* を用いてその近似値をモンテカルロ法を採用した場合よりも，はるかに少ない計算量で求めることができる。この離散化近似法を用いる場合には，入力変数に対する離散化をどのくらいの範囲を何点で行えばよいかということが最も重要な検討事項となる。

この離散化近似法と同様な目的を持った手法として，ポイントエスティメイト法（点推定法）がある。これは，モンテカルロ法に代わる近似解法であり，各変数に対する関数のただ二つの計算を要するだけで，テイラー展開の二次項に比較しうる正確さを有し，非解析関数にも適用可能である。[1] しかし，この手法は対象とする系の応答の平均値や分散，高次のモーメント等の統計量は求められるものの，その分布形を特定することはできず，これら統計量から推定される分布形を用いて破壊確率を求めているため，その正確さに欠けると思われる。これに対して，ここで提案している離散化近似法は，モンテカルロ法を簡略化して再現する手法であり，応答の分布形も，離散化した形ではあるが，求めることができる。すなわち，モンテカルロ法では，離散化する点を多数とり，かつ離散化点の値を確率密度に比例して何度も抽出することに相当し，いわば一変数に対して二次元的にサンプリングすることになるが，離散化近似法では，離散化点の値を確率密度に比例して何度も抽出することなく，これを確率質量という，いわば重みに置き換えることにより，サンプリングを一次元化していることになるのである。

3　計算例

文献[2] の信頼性解析例より，斜面の安定に関する信頼性を評価する。文献[2] では有限要素法に線形一次近似理論を適用し，弾性域での解析を行っているが，ここでは塑性域をも含めた解析を行う。したがって線形一次近似理論は適用できず，モンテカルロ法か離散化近似法が有効な手法となる。このような場合に離散化近似法が最もその効果を発揮することになると思われる。

図２に示す要素分割を用い，材料定数の平均値と変動係数は，表１に示すとおりで，全て正規分布に従うものとする。弾塑性解析のプログラムとして，E.HINTON and D.R.J.OWEN の有限要素プログラム[3] を用いている。

尚，解析結果は，発表時に譲ることとする。

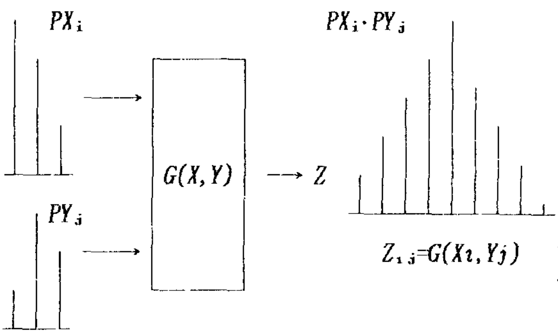

図１　離散型応答の概念図

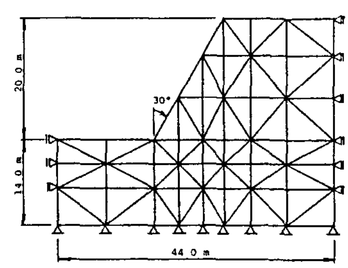

図２　解析モデル

表１　材料定数の平均値と変動係数[2]

材料定数	平均値	変動係数
ヤング係数 E	10 000 kg/cm² (980 MPa)	0.1
ポアソン比 ν	0.3	0.1
単位体積重量 γ	0.002 3 kg/cm³ (22.54 kN/m³)	0.1
粘着力 c	0.1 kg/cm² (9.8 kPa)	0.1
内部摩擦角 ϕ	35°	0.077

参考文献

1)　岡崎孝夫：海洋構造物の信頼性解析，大成建設技術研究所報，第18号，pp.277〜286,1986
2)　桜井春輔，土居康成：有限要素法による斜面の信頼性解析，土木学会論文集，No.330,pp.87〜 97,1983
3)　E.HINTON,D.R.J.OWEN:FINITE ELEMENTS IN PLASTICITY-Theory and Practice, Pineridge Press Limited,1980