

有限変位理論のための区間伝達マトリックスの高精度化について

岐阜大学 学生員 〇小川 元秀

東京大学 龔 三峡

岐阜大学 正員 藤井 文夫

1. はじめに

構造部材の弾性有限変位問題を伝達マトリックス法により解析する際、区間伝達マトリックスが高精度なものであることが要求されることはいうまでもない。高精度な区間伝達マトリックスを得ることを目的として、Fig. 1のような手順で区間伝達マトリックスの高精度化の試みを行った。即ち、有限変位を剛体変位と微小な弾性変形とに分離し、簡単な幾何学的考察とエネルギー定理を用いて、区間伝達マトリックス F_0 を参考文献 [1] の中で導いたが、今回はこの F_0 から有限変位問題のためのTotal Lagrange法の微分方程式を導き、直接この微分方程式から高精度な区間伝達マトリックスを求めることを試みた。つまり、この微分方程式に積分公式を応用することによって、区間伝達マトリックス F_d を求めようとするものである。

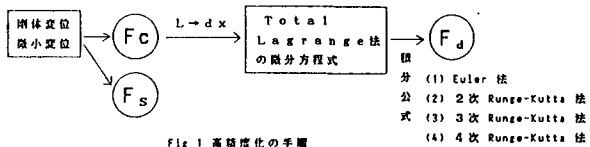


Fig. 1 高精度化の手順

Fig. 1のような手順で区間伝達マトリックスの高精度化の試みを行った。即ち、有限変位を剛体変位と微小な弾性変形とに分離し、簡単な幾何学的考察とエネルギー定理を用いて、区間伝達マトリックス F_0 を参考文献 [1] の中で導いたが、今回はこの F_0 から有限変位問題のためのTotal Lagrange法の微分方程式を導き、直接この微分方程式から高精度な区間伝達マトリックスを求めることを試みた。つまり、この微分方程式に積分公式を応用することによって、区間伝達マトリックス F_d を求めようとするものである。

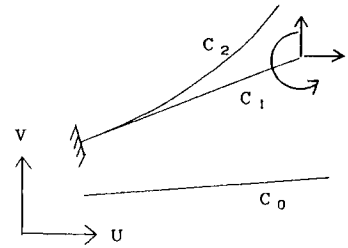


Fig. 2 剛体変位と弾性変形

2. 理論

Fig. 2は、区間伝達マトリックス F_0 を求める際に、有限変位を剛体変位 ($C_0 \rightarrow C_1$) 及び微小弾性変形 ($C_1 \rightarrow C_2$) に分離する模様を示したものである。ここで F_0 は C_1 から C_2 への微小弾性変形について片持ちばりを基調としている。これに対して、 C_1 から C_2 の弾性変形を評価する際に、単純ばりの変形公式を用いると、区間伝達マトリックス F_0 が求められる。Elastic問題に対する F_0 は、参考文献 [2] の中の混合法と全く同じ結果を与える。

次に、区間伝達マトリックス F_0 を利用して、有限変位問題に対するTotal Lagrange法に基づく微分方程式を誘導する。 F_0 においてB端の状態量は、A端の状態量と部材長 L の関数であるとみなすことができる。そこでこの部材長を微小量 dx に近づけた際のA端からB端への変化率 dZ/dx が求められ、1階の6元連立微分方程式を得ることができる。これが次の式(1)である。

$$dZ/dx = A(\theta)Z \quad \text{---- (1)}$$

ただし中間荷重の影響はすべて無視している。ここで微分方程式(1)よりスタートして、それぞれ①Euler法、②2次のRunge-Kutta法、③3次のRunge-Kutta法、④4次のRunge-Kutta法、の積分公式を用いて、新たな区間伝達マトリックス $F_{d1}, F_{d2}, F_{d3}, F_{d4}$ を求めた。ここで微分方程式(1)における(6×6)の係数行列Aにおいて、非ゼロ係数の分布に注目すると、Aの4次以上の項はすべて恒等的にゼロ行列となりAの3次式までの項の計算はAがゼロ要素を多く含むために、比較的容易に陽な形で区間伝達マトリックスを求めることができる。ここではその中で最も精度の期待できる F_{d4} について考察を加えることにする。

F_{d4} は、Fig.3のようにAの1次式、2次式、そして3次式の項により表現さる、各項の中で非ゼロ係数の占める分布状況を F_e の中で弾性変形を示す部分マトリックスDFとの対応で表すと、伸び剛性EAの項はすでにAの1次式で表されており、曲げ剛性EIの項が精度を左右する上で重要な鍵を握っているものと考えられる。Aの1次、2次、3次で表現される曲げ剛性EIの分布はFig.3のようになり、その精度向上をねらう上で考慮しなければならない曲げ変形の項の優先順位がこの対応によってもよくわかる。

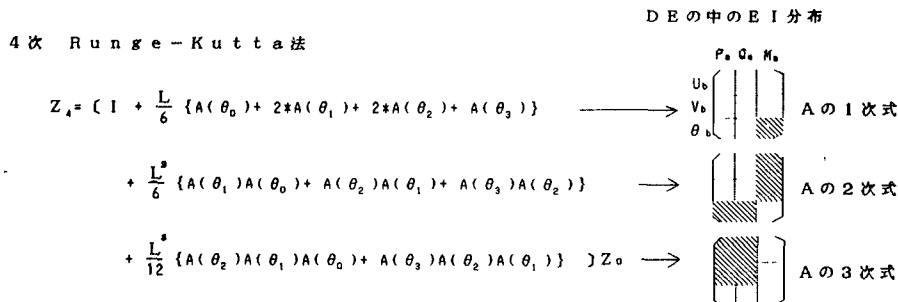


Fig.3 Fd4中のAの次数

3. 計算例

F_e 、 F_s 、および F_{d4} を利用して、Fig.4の滑節-剛結のダイヤモンドフレームを計算した結果を表に示す。これは部材の伸び剛性EAを ∞ としたElastica問題として解析した。計算結果から見てもわかるように、 F_{d4} は F_e 及び F_s よりも非常に良い精度を示しており、1辺を4分割しただけでもすでに厳密解と3桁一致していることがわかる。

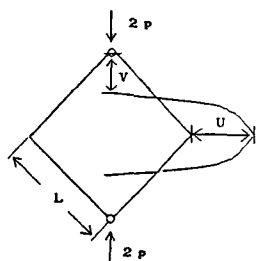


Fig.4 ダイヤモンドフレーム

$\frac{PL^2}{EI}$	U/L (4 elements)			EXACT	V/L (4 elements)			EXACT
	Fc	Pa	Fd4		Fc	Pa	Fd4	
1.0	0.168	0.171	0.170	0.17046	0.236	0.246	0.247	0.24754
2.0	0.252	0.245	0.242	0.24224	0.562	0.580	0.582	0.58236
3.0	0.226	0.211	0.205	0.20519	0.824	0.830	0.831	0.83140

4. あとがき

有限変位理論における区間伝達マトリックスの高精度化の試みとして、すでに得られている区間伝達マトリックス F_e よりLagrange流の微分方程式を導き、この微分方程式から直接高精度な区間伝達マトリックス F_d ($F_{d1} \sim F_{d4}$)を導いた。微分方程式の中に出てくる係数マトリックスAの非ゼロ係数の分布に注目すると F_d を陽な形で求めることができ、Aの次数との対応から曲げ変形の項のうち、どの項が一番優先的に考慮されなければならないかということが判明した。Lagrangeの微分方程式より得られた区間伝達マトリックスのうち F_{d4} は特に高精度なもので、過去の F_e 及び F_s のどれと比べても著しい精度の向上がみられた。

5. 参考文献

- [1] Fumio Fujii and San-xia Gong: "FIELD TRANSFER MATRIX FOR NON-LINEAR CURVED BEAMS", ST, Proc. ASCE, March 1988
- [2] Fumio Fujii: "A SIMPLE MIXED FORMULATION FOR ELASTICA PROBLEMS", Computers and Structures Vol.17, No1, 1983. pp.79-88